1. **(2,5 pontos)** Seja $f(x,y) = \sqrt[3]{3x^4 + 2y^4}$.

   (a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Verifique se a função $\frac{\partial f}{\partial x}$ é ou não contínua em $(0,0)$.
   (Justifique todas as passagens.)

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}(3x^4+2y^4)^{-2/3} \cdot 12x^3$ se $3x^4+2y^4 \neq 0$,

isto é, se $(x,y) \neq (0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{3x^4}}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \sqrt[3]{3}\, x^{1/3} = 0.$$

Assim $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3}{\sqrt[3]{(3x^4+2y^4)^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(b) Para verificar se $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$

precisamos verificar se
$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{4x^3}{\sqrt[3]{(3x^4+2y^4)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 4\sqrt[3]{\frac{x^9}{(3x^4+2y^4)^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} 4\sqrt[3]{\left(\frac{x^4}{3x^4+2y^4}\right)^2 \cdot x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

limitada (*) $\;\to 0$

(*) $0 \le x^4 \le 3x^4 + 2y^4 \implies 0 \le \frac{x^4}{3x^4+2y^4} \le 1 \;\forall (x,y) \neq (0,0)$

Portanto $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$.

2. **(2,5 pontos)** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x, y)$ uma função de classe C^2 e seja

$$g(u,t) = f(u^2 - t^2, 2ut).$$

Calcule as derivadas parciais $\dfrac{\partial g}{\partial u}, \dfrac{\partial g}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ e $\dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}$ em termos das derivadas parciais de f e determine o valor de $r > 0$ para que a igualdade

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,t) + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(u,t) = 48\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2 - t^2, 2ut) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2 - t^2, 2ut)\right]$$

seja válida para todo $(u,t) \in \mathbb{R}^2$ com $u^2 + t^2 = r^2$.

Observação: Deixe os cálculos de TODAS as derivadas parciais na prova.

$$g(u,t) = f(\underbrace{u^2 - t^2}_{x}, \underbrace{2ut}_{y})$$

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, 2u + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, 2t$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,t) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2u\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\, 2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\, 2t\right] + 2t\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\, 2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \cdot 2t\right]$$

Logo

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,t) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(u^2-t^2, 2ut) + 4u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2-t^2, 2ut) + 4ut\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u^2-t^2, 2ut) + 4t^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2-t^2, 2ut).} \quad (1)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(u,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)(-2t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, 2u$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(u,t) = -2\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 2t\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)(-2t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\, 2u\right] + 2u\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \cdot (-2t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\, 2u\right]$$

Assim:

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(u,t) = -2\frac{\partial f}{\partial x}(u^2-t^2, 2ut) + 4t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2-t^2, 2ut) - 4ut\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u^2-t^2, 2ut) + 4u^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2-t^2, 2ut).} \quad (2)$$

Fazendo (1) + (2) obtemos:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,t) + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(u,t) = 4(u^2+t^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2-t^2, 2ut)$$

$$+4(u^2+t^2)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2-t^2, 2ut)$$

$$= 4(u^2+t^2)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2-t^2, 2ut) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2-t^2, 2ut)\right]$$

Queremos então $4(u^2+t^2) = 48$ se $u^2+t^2 = r^2$. Logo $4r^2 = 48$ e então $r = \sqrt{12}$.

3. (2,5 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que:

(i) A imagem da curva $\gamma :]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (\operatorname{cotg}(t), \sec^2(t))$ está contida em uma curva de nível de f.

(ii) A imagem da curva $\sigma :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^3$ dada por $\sigma(u) = \left(\sqrt[3]{u}, u^2 + 1, \frac{u^3}{2} - \frac{\sqrt[3]{u}}{2} + 1 \right)$ está contida no gráfico de f.

(a) Determine $\nabla f(1,2)$ justificando claramente o que está usando.

(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2)$, onde $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

(c) Qual é a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2, f(1,2))$?

a) De (i), sabemos que $f(\gamma(t)) = c$ $\forall t \in]0, \pi/2[$. Derivando em relação a t, temos: $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$, $\forall t \in]0, \pi/2[$.
Ou seja, $\nabla f(\operatorname{cotg}(t), \sec^2(t)) \cdot (-\operatorname{cosec}^2(t), 2\sec^2(t)\operatorname{tg}(t)) = 0$ $\forall t \in]0, \pi/2[$. Fazendo $t = \frac{\pi}{4}$, obtemos: $\nabla f(1,2) \cdot (-2, 4) = 0$ (I)

De (ii), sabemos que $f(\sqrt[3]{u}, u^2+1) = \frac{u^3}{2} - \frac{\sqrt[3]{u}}{2} + 1$, $\forall u \in]0, +\infty[$
Derivando em relação a u, temos:
$\nabla f(\sqrt[3]{u}, u^2+1) \cdot \left(\frac{u^{-2/3}}{3}, 2u\right) = \frac{3u^2}{2} - \frac{u^{-2/3}}{6}$, $\forall u \in]0, +\infty[$.
fazendo $u = 1$, obtemos: $\nabla f(1,2) \cdot (1/3, 2) = 4/3$. (II)

Se $\nabla f(1,2) = (a, b)$, de (I) e (II) deduzimos que

$$\begin{cases} -2a + 4b = 0 \\ \frac{a}{3} + 2b = \frac{4}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2b \\ \frac{8b}{3} = \frac{4}{3} \end{cases} \iff \begin{matrix} a = 1 \\ b = 1/2 \end{matrix}$$

Logo, $\nabla f(1,2) = (1, 1/2)$

(b) Como f é diferenciável, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2) = \nabla f(1,2) \cdot \vec{u} =$
$= (1, 1/2) \cdot (1/2, \sqrt{3}/2) = 1/2 + \sqrt{3}/4 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

(c) Fazendo $u = 1$ em (ii), temos: $\sigma(1) = (1, 2, 1)$.
Como $\operatorname{Im}(\sigma) \subset \operatorname{Graf}(f)$, $f(1,2) = 1$.
Logo, a equação do plano pedido é
$1 \cdot (x-1) + 1/2\,(y-2) - 1\,(z-1) = 0$, ou seja,
$x + \frac{y}{2} - z - 1 = 0$

AGUARDE!

1. **(2,5 pontos)** Seja $f(x,y) = \sqrt[3]{5x^4+3y^4}$.

   (a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   (b) Verifique se a função $\frac{\partial f}{\partial x}$ é ou não contínua em $(0,0)$.
   (Justifique todas as passagens.)

(a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{3}(5x^4+3y^4)^{-2/3} \cdot 20x^3$ desde que

$5x^4+3y^4 \neq 0$, isto é, desde que $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{5x^4}}{x} = \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{5}\, x^{1/3} = 0$$

Assim:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{20}{3} \frac{x^3}{\sqrt[3]{(5x^4+3y^4)^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(b) Verificar se $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{20}{3} \frac{x^3}{\sqrt[3]{(5x^4+3y^4)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{20}{3} \sqrt[3]{\frac{x^9}{(5x^4+3y^4)^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{20}{3} \sqrt[3]{\left(\frac{x^4}{5x^4+3y^4}\right)^2 \underbrace{x}_{\to 0}} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

limitada (*)

(*) $0 \leq x^4 \leq 5x^4+3y^4 \implies 0 \leq \frac{x^4}{5x^4+3y^4} \leq 1 \quad \forall (x,y) \neq (0,0).$

Portanto $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$.

2. **(2,5 pontos)** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x,y)$ uma função de classe C^2 e seja

$$g(t,u) = f(2tu, t^2 - u^2).$$

Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial g}{\partial t}, \frac{\partial g}{\partial u}, \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$ e $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ em termos das derivadas parciais de f e determine o valor de $r > 0$ para que a igualdade

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(t,u) + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,u) = 56\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2tu, t^2-u^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2tu, t^2-u^2)\right]$$

seja válida para todo $(u,t) \in \mathbb{R}^2$ com $t^2 + u^2 = r^2$.

Observação: Deixe os cálculos de TODAS as derivadas parciais na prova.

$$g(t,u) = f(\underbrace{2tu}_{x}, \underbrace{t^2-u^2}_{y})$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,u) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot 2u + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot 2t$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,u) = 2u\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)2t\right] + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + 2t\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)2t\right]$$

Assim:

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(u,t) = 4u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2tu, t^2-u^2) + 4ut\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(2tu,t^2-u^2) + 4ut\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(2tu,t^2-u^2) + 4t^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2tu,t^2-u^2) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).}$$

(1)

$$\frac{\partial g}{\partial u}(t,u) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot 2t + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)(-2u)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(t,u) = 2t\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)2t + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)(-2u)\right] +$$

$$-2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - 2u\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,2t + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)(-2u)\right]$$

Logo
$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(t,u) = {} & 4t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2tu, t^2-u^2) - 4tu\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2tu, t^2-u^2) \\ & -4tu\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2tu, t^2-u^2) + 4u^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2tu, t^2-u^2) - 2\frac{\partial f}{\partial y}(2tu, t^2-u^2)\end{aligned}}$$

(2)

É claro que (1) + (2) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,u) + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(t,u) = 4(t^2+u^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2tu, t^2-u^2)$$
$$+ 4(t^2+u^2)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2tu, t^2-u^2)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t,u) + \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(t,u) = 4(t^2+u^2)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2tu, t^2-u^2) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2tu, t^2-u^2)\right]}$$

Se $t^2+u^2 = r^2$, queremos então que
$4r^2 = 56$, logo $r = \sqrt{14}$.

3. **(2,5 pontos)** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que:

(i) A imagem da curva $\gamma :]0, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^2$ dada por $\gamma(t) = (\sec^2(t), \operatorname{cotg}(t))$ está contida em uma curva de nível de f.

(ii) A imagem da curva $\sigma :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^3$ dada por $\sigma(u) = \left(u^2+1, \sqrt[3]{u}, \frac{u^3}{2} - \frac{\sqrt[3]{u}}{2} + 1\right)$ está contida no gráfico de f.

(a) Determine $\nabla f(2,1)$ justificando claramente o que está usando.

(b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,1)$, onde $\vec{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

(c) Qual é a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 1, f(2,1))$?

a) De (i), temos que $f(\gamma(t)) = C$, $\forall t \in]0, \pi/2[$. Derivando em relação a t, obtemos: $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$, $\forall t \in]0, \pi/2[$.
Ou seja, $\nabla f(\sec^2(t), \operatorname{cotg}(t)) \cdot (2\sec^2(t)\operatorname{tg} t, -\operatorname{cosec}^2(t)) = 0$, $\forall t \in]0, \pi/2[$. Para $t = \pi/4$, obtemos:

$$\nabla f(2,1) \cdot (4,-2) = 0 \quad \text{(I)}$$

De (ii), sabemos que $f(u^2+1, \sqrt[3]{u}) = \frac{u^3}{2} - \frac{\sqrt[3]{u}}{2} + 1$ para todo $u \in]0, +\infty[$. Derivando em relação a u, temos:

$$\nabla f(u^2+1, \sqrt[3]{u}) \cdot \left(2u, \frac{u^{-2/3}}{3}\right) = \frac{3u^2}{2} - \frac{u^{-2/3}}{6}, \ \forall u \in]0, +\infty[.$$

Fazendo $u = 1$, obtemos:

$$\nabla f(2,1) \cdot (2, 1/3) = 4/3 \quad \text{(II)}$$

Se $\nabla f(2,1) = (a,b)$, de (I) e (II) obtemos:

$$\begin{cases} 4a - 2b = 0 \\ 2a + \frac{b}{3} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ b + \frac{b}{3} = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} b = 1 \\ a = 1/2 \end{array}$$

Logo, $\nabla f(2,1) = (1/2, 1)$

b) Como f é diferenciável, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2,1) = \nabla f(2,1) \cdot \vec{u} =$
$= (1/2, 1) \cdot (1/2, \sqrt{3}/2) = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{4}$

c) Fazendo $u = 1$ em (ii) temos que $\sigma(1) = (2, 1, 1) \in \operatorname{Graf}(f)$
Logo, $f(2,1) = 1$ e a equação do plano é

$$1/2\,(x-2) + 1.(y-1) - 1(z-1) = 0, \text{ ou seja,}$$

$$\frac{x}{2} + y - z - 1 = 0$$

AGUARDE!