1. **(3,0)** Seja $f(x,y) = xe^{\sqrt[3]{x^2+y^4}}$.

(a) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}$ explicitando o seu domínio. A função $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$?

(b) Determine o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ nos quais f é diferenciável. **Justifique !**

(a) Se $(x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{\sqrt[3]{x^2+y^4}} + xe^{\sqrt[3]{x^2+y^4}} \cdot \frac{1.2x}{3(x^2+y^4)^{2/3}}$

Verificar se existe $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}e^{\sqrt[3]{x^2}}}{\cancel{x}} = 1$$

Logo
$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} e^{\sqrt[3]{x^2+y^4}} + \frac{2}{3}e^{\sqrt[3]{x^2+y^4}} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2+y^4)^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}}$$

Portanto o domínio de $\frac{\partial f}{\partial x}$ é $\mathbb{R}^2$.

Para verificar se $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$ temos que ver se $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

(*)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\sqrt[3]{x^2+y^2}}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2+y^4)^2}}\right)$$

(*) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2+y^4)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt[3]{\underbrace{x^2}_{\to 0}\underbrace{\left(\frac{x^2}{x^2+y^4}\right)^2}_{\text{limitada}}} = 0$$

(**)

Temos que

(**) $0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^4} \leq 1 \ \forall (x,y)\neq(0,0)$ e assim, $0 \leq \left(\frac{x^2}{x^2+y^4}\right)^2 \leq 1$

Logo
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{e^{\sqrt[3]{x^2+y^4}}}_{\to 0}\left(1 + \frac{2}{3}\underbrace{\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^2+y^4)^2}}}_{\to 0 \text{ (por (*))}}\right) = 1 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

A função $\frac{\partial f}{\partial x}$ é então contínua em $(0,0)$.

(b) $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x e^{\sqrt[3]{x^2+y^4}} \cdot \frac{1}{3}(x^2+y^4)^{-2/3} \cdot 4y^3 \quad \text{se } (x,y)\neq(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Portanto $$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{3}\frac{xy^3}{\sqrt[3]{(x^2+y^4)^2}} e^{\sqrt[3]{x^2+y^4}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

As derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Logo f é diferenciável em $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Em $(0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x}$ é contínua em $(0,0)$

e $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Seja $$E(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)$$
$$= x e^{\sqrt[3]{x^2+y^4}} - x$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\left(e^{\sqrt[3]{x^2+y^4}}-1\right)}{\sqrt{x^2+y^4}} = 0$$

$\to 0$

limitada

Logo f é diferenciável em $(0,0)$.

Assim, f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Outra solução na prova (B).

Prova 2 – 14/10/2013 – Turma A

Questão 2. (3,0) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x,y)$, uma função de classe C^2 e defina

$$g(u,v) = f(u^2 - v^3, 2u^2v).$$

a) Determine $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ em termos da função f e de suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem.

b) Se $2x + 4y + 3z = 4$ é a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 2, f(0,2))$, determine $f(0,2)$, $\nabla f(0,2)$ e $\nabla g(1,1)$.

c) Sabendo que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,2) = 2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,2) = 4$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,2) = 1$, calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1,1)$.

Solução Primeiramente, observamos que g é uma função de classe C^2, ja que é composta de f, que é de classe C^2, com as funções $x = u^2 - v^3$ e $y = 2u^2v$ que são de classe C^∞ em (u,v). Dessa forma, as derivadas mistas de f e as derivadas mistas de g são iguais (Teorema de Schwartz).

(a) Usando a Regra da Cadeia, temos

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 - v^3, 2u^2v)\cdot(-3v^2) + \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 - v^3, 2u^2v)\cdot 2u^2$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 - v^3, 2u^2v)\cdot 4u \\ &+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2 - v^3, 2u^2v)\cdot 2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u^2 - v^3, 2u^2v)\cdot 4uv\right]\cdot(-3v^2) \\ &+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u^2 - v^3, 2u^2v)\cdot 2u + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2 - v^3, 2u^2v)\cdot 4uv\right]\cdot 2u^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) &= 4u\frac{\partial f}{\partial y}(u^2 - v^3, 2u^2v) - 6uv^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2 - v^3, 2u^2v) \\ &+(4u^3 - 12uv^3)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u^2 - v^3, 2u^2v) + 8u^3v\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2 - v^3, 2u^2v).\end{aligned}$$

(b) Como $z = f(2,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,2)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,2)(y-2)$ e $z = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}y + \frac{4}{3}$ são duas equações para o mesmo plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 2, f(0,2))$, identificando coeficientes, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,2) = -\frac{2}{3} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,2) = -\frac{4}{3} \text{ e } f(0,2) = -\frac{4}{3}.$$

Logo, $f(0,2) = -\frac{4}{3}$, $\nabla f(0,2) = -\frac{2}{3}(\vec{i} + 2\vec{j})$ e $g(1,1) = f(0,2) = -\frac{4}{3}$.

Como $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u^2 - v^3, 2u^2v)\cdot 2u + \frac{\partial f}{\partial y}(u^2 - v^3, 2u^2v)\cdot 4uv$, temos $\nabla g(1,1) = -\frac{2}{3}(10\vec{i} + \vec{j})$.

(c) Quando $(u,v) = (1,1)$, temos $(x,y) = (0,2)$ e portanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1,1) &= 4\frac{\partial f}{\partial y}(0,2) - 6\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,2) - 8\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,2) + 8\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,2) \\ &= 4\times(-\frac{4}{3}) - 6\times 2 - 8\times 1 + 8\times 4 = -\frac{16}{3} + 12 = \frac{20}{3}.\end{aligned}$$

3. **(2,5)** Seja π o plano tangente ao gráfico de uma função f em um ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Seja $\gamma(t) = (1 + \frac{1}{t}, t), t \neq 0$ uma parametrização para a curva de nível 1 de f e suponha que $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$ para algum t_0. Determine uma equação para o plano π sabendo que ele contém os pontos $(1, 1, \frac{1}{2})$ e $(4, 1, 2)$.

Como $f(\gamma(t)) = 1$, $\forall t \neq 0$, temos:

$$\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0, \quad \forall t \neq 0$$

Para $t = t_0$: $\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot (-1/t_0^2, 1) = 0$

Logo, $\nabla f(\gamma(t_0))$ é da forma $\lambda(1, 1/t_0^2)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Neste caso, $\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t_0)) = \lambda$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t_0)) = \lambda/t_0^2$ e a equação do plano π é:

$$\lambda(x - (1 + 1/t_0)) + \lambda/t_0^2 (y - t_0) + (-1)(z - 1) = 0 \quad (*)$$

Substituindo (x, y, z) por $(1, 1, 1/2)$ e por $(4, 1, 2)$ obtemos duas equações:

(I) $\lambda(-1/t_0) + \lambda/t_0^2 (1 - t_0) + 1/2 = 0$

(II) $\lambda(3 - 1/t_0) + \lambda/t_0^2 (1 - t_0) - 1 = 0$

Fazendo (I) − (II) obtemos $-3\lambda + 3/2 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1/2}$

Substituindo $\lambda = 1/2$ em (I) obtemos $\boxed{t_0 = 1}$.

Substituindo $\lambda = 1/2$ e $t_0 = 1$ na equação do plano $(*)$ obtemos a equação pedida:

$$x + y - 2z - 1 = 0$$

4. **(1,5)** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as imagens das curvas

$$\gamma(t) = (t+1, t^2, t^4 + 2t^3 + t^2 - t - 1), t \in \mathbb{R}$$

e

$$\sigma(u) = (\,\mathrm{sen} u,\ \cos u,\ \cos u - \ \cos^3 u - \ \mathrm{sen} u), u \in [0, 2\pi]$$

estão contidas no gráfico de f. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 0, f(1,0))$.

$\gamma(0) = (1,0,-1)$ e $\sigma(\pi/2) = (1,0,-1)$; $f(1,0) = -1$

Como $Im(\gamma)$ e $Im(\sigma)$ estão contidas no gráfico da função diferenciável f, sabemos que $\gamma'(0)$ e $\sigma'(\pi/2)$ são vetores paralelos ao plano tangente ao gráfico de f em $(1,0,-1)$. Como $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,0), \frac{\partial f}{\partial y}(1,0), -1\right) = \vec{n}$ é um vetor normal a esto plano, temos:

$\vec{n} \cdot \gamma'(0) = 0$ e $\vec{n} \cdot \sigma'(\pi/2) = 0$. (*)

Por outro lado,

$\gamma'(t) = (1, 2t, 4t^3 + 6t^2 + 2t - 1) \Rightarrow \gamma'(0) = (1,0,-1)$

$\sigma'(u) = (\cos u; -\mathrm{sen} u, -\mathrm{sen} u + 3\cos^2 u\, \mathrm{sen} u - \cos u) \Rightarrow$

$\sigma'(\pi/2) = (0, -1, -1)$

De (*) temos:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) + 1 = 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = -1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1 \end{array}$$

O plano pedido tem equação:

$-1(x-1) + 1(y-0) - 1(z+1) = 0$, ou seja,

$$x - y + z = 0$$

1. **(3,0)** Seja $f(x,y) = ye^{\sqrt[3]{x^4+y^2}}$.

   (a) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ explicitando o seu domínio. A função $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0)$?

   (b) Determine o conjunto dos pontos de $\mathbb{R}^2$ nos quais f é diferenciável. **Justifique !**

(a) Se $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{\sqrt[3]{x^4+y^2}} + y e^{\sqrt[3]{x^4+y^2}} \cdot \frac{1}{3}(x^4+y^2)^{-2/3} \cdot 2y$$

$$= e^{\sqrt[3]{x^4+y^2}}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{y^2}{(x^4+y^2)^{2/3}}\right)$$

Em $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{y e^{\sqrt[3]{x^4+y^2}}}{y} = 1$$

Assim, o domínio de $\frac{\partial f}{\partial y}$ é $\mathbb{R}^2$ e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} e^{\sqrt[3]{x^4+y^2}}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{y^2}{(x^4+y^2)^{2/3}}\right) & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

<u>Verificar se $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em $(0,0)$.</u>

Ver se $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\overbrace{\sqrt[3]{x^4+y^2}}^{\to 0}}\left(1 + \frac{2}{3}\underbrace{\frac{y^2}{(x^4+y^2)^{2/3}}}_{(*)\ \to 0}\right) = 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

$$(*)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2}{(x^4+y^2)^{2/3}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt[3]{\overbrace{y^2}^{\to 0}\underbrace{\left(\frac{y^2}{x^4+y^2}\right)^2}_{\text{limitada } (**)}} = 0$$

$$(**)\quad 0 \leq y^2 \leq x^4+y^2 \quad \text{Então } 0 \leq \frac{y^2}{x^4+y^2} \leq 1 \ \forall (x,y)\neq(0,0)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \left(\frac{y^2}{x^4+y^2}\right)^2 \leq 1$$

(b) $\frac{\partial f}{\partial y}$ é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\, e^{\sqrt[3]{x^4+y^2}} \cdot \frac{1}{3}(x^4+y^2)^{-2/3} \cdot 4x^3$$

$$= \frac{4}{3}\frac{x^3 y}{(x^4+y^2)^{2/3}} e^{\sqrt[3]{x^4+y^2}} \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Assim
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{4}{3}\frac{x^3 y}{(x^4+y^2)^{2/3}} e^{\sqrt[3]{x^4+y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Observe que (*)
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{(x^4+y^2)^{2/3}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt[3]{\frac{x^9\, y^3}{(x^4+y^2)^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt[3]{\underbrace{\left(\frac{x^4}{(x^4+y^2)}\right)^2}_{\text{limitada}} \underbrace{x y^3}_{\to 0}} = 0$$

Assim
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4}{3}\underbrace{\frac{x^3 y}{(x^4+y^2)^{2/3}}}_{\to\, 0 \text{ (por (*))}} \underbrace{e^{\sqrt[3]{x^4+y^2}}}_{\to\, 1}$$

$$= 0 \cdot 1 = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

As funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$. Logo f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

(outra solução na prova A)

Prova 2 – 14/10/2013 – Turma B

Questão 2. (3,0) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f = f(x,y)$, uma função de classe C^2 e defina

$$g(u,v) = f(2u^2v, u^2 - v^3).$$

a) Determine $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ em termos da função f e de suas derivadas parciais de primeira e segunda ordem.

b) Se $4x + 2y + 3z = 4$ é a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 0, f(2,0))$, determine $f(2,0)$, $\nabla f(2,0)$ e $g(1,1)$.

c) Sabendo que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,0) = 4$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,0) = 2$ e que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,0) = -1$, calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1,1)$.

Solução Primeiramente, observamos que g é uma função de classe C^2, ja que é composta de f, que é de classe C^2, com as funções $x = 2u^2v$ e $y = u^2 - v^3$, que são de classe C^∞ em (u,v). Dessa forma, as derivadas mistas de f e as derivadas mistas de g são iguais (Teorema de Schwartz).

(a) Usando a Regra da Cadeia, temos

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(2u^2v, u^2 - v^3) \cdot 2u^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(2u^2v, u^2 - v^3) \cdot (-3v^2)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) \quad &= \frac{\partial f}{\partial x}(2u^2v, u^2 - v^3) \cdot 4u \\ &+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2u^2v, u^2 - v^3) \cdot 4uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2u^2v, u^2 - v^3) \cdot 2u\right] \cdot 2u^2 \\ &+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2u^2v, u^2 - v^3) \cdot 4uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2u^2v, u^2 - v^3) \cdot 2u\right] \cdot (-3v^2). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) \quad &= 4u\frac{\partial f}{\partial x}(2u^2v, u^2 - v^3) + 8u^3v\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2u^2v, u^2 - v^3) \\ &+ (4u^3 - 12uv^3)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2u^2v, u^2 - v^3) - 6uv^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2u^2v, u^2 - v^3). \end{aligned}$$

(b) Como $z = f(2,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,0)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,0)(y-0)$ e $z = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$ são duas equações para o mesmo plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 0, f(2,0))$, identificando coeficientes, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,0) = -\frac{4}{3} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,0) = -\frac{2}{3} \text{ e } f(2,0) = -\frac{4}{3}.$$

Logo, $f(2,0) = -\frac{4}{3}$, $\nabla f(2,0) = -\frac{2}{3}(2\vec{i} + \vec{j})$ e $g(1,1) = f(2,0) = -\frac{4}{3}$.

(c) Quando $(u,v) = (1,1)$, temos $(x,y) = (2,0)$ e portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(1,1) \quad &= 4\frac{\partial f}{\partial x}(2,0) + 8\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,0) - 8\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,0) - 6\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,0) \\ &= 4 \times (-\frac{4}{3}) + 8 \times 4 - 8 \times (-1) - 6 \times 2 = -\frac{16}{3} + 28 = \frac{68}{3}. \end{aligned}$$

3. **(2,5)** Seja π o plano tangente ao gráfico de uma função f em um ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Seja $\gamma(t) = (t, 1 + \frac{1}{t}), t \neq 0$ uma parametrização para a curva de nível 1 de f e suponha que $(x_0, y_0) = \gamma(t_0)$ para algum t_0. Determine uma equação para o plano π sabendo que ele contém os pontos $(1, 1, \frac{1}{2})$ e $(1, 4, 2)$.

Como $f(\gamma(t)) = 1$, $\forall t \neq 0$, temos: $\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = 0$ $\forall t \neq 0$

Para $t = t_0$, $\nabla f(\gamma(t_0)) \cdot (1, -1/t_0^2) = 0$.

Logo, o vetor $\nabla f(\gamma(t_0))$ é da forma $\lambda(1/t_0^2, 1)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Neste caso,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t_0)) = \lambda / t_0^2 \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t_0)) = \lambda$$

e a equação do plano π é:

$$\frac{\lambda}{t_0^2}(x - t_0) + \lambda(y - 1 - 1/t_0) - 1(z - 1) = 0 \quad (*)$$

Substituindo (x, y, z) por $(1, 1, 1/2)$ e por $(1, 4, 2)$ obtemos duas equações:

(I) $\lambda / t_0^2 (1 - t_0) + \lambda(-1/t_0) + 1/2 = 0$

(II) $\lambda / t_0^2 (1 - t_0) + \lambda(3 - 1/t_0) - 1 = 0$

Fazendo (I) - (II) obtemos $-3\lambda + 3/2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1/2$

Substituindo $\lambda = 1/2$ em (I), obtemos: $t_0 = 1$.

Substituindo em $(*)$ obtemos a equação do plano:

$$x + y - 2z - 1 = 0$$

4. **(1,5)** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que as imagens das curvas

$$\gamma(t) = (t^2, t+1, t^4 + 2t^3 + t^2 - t - 1), t \in \mathbb{R}$$

e

$$\sigma(u) = (\cos u, \operatorname{sen} u, \cos u - \cos^3 u - \operatorname{sen} u), u \in [0, 2\pi]$$

estão contidas no gráfico de f. Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(0, 1, f(0,1))$.

$\gamma(0) = (0,1,-1)$ e $\sigma(\pi/2) = (0,1,-1)$; $f(0,1) = -1$

Como $Im(\gamma)$ e $Im(\sigma)$ estão contidas no gráfico da função diferenciável f, sabemos que $\gamma'(0)$ e $\sigma'(\pi/2)$ são vetores paralelos ao plano tangente ao gráfico de f em $(0,1,-1)$. Como $\vec{n} = (\frac{\partial f}{\partial x}(0,1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,1), -1)$ é um vetor normal a este plano, temos:

$$\vec{n} \cdot \gamma'(0) = 0 \quad \text{e} \quad \vec{n} \cdot \sigma'(\pi/2) = 0 \quad (*)$$

Por outro lado, $\gamma'(t) = (2t, 1, 4t^3 + 6t^2 + 2t - 1) \Rightarrow \gamma'(0) = (0,1,-1)$

e $\sigma'(u) = (-\operatorname{sen} u, \cos u, -\operatorname{sen} u + 3\cos^2 u \operatorname{sen} u - \cos u) \Rightarrow \sigma'(\pi/2) = (-1, 0, -1)$

As equações em $(*)$ ficam:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) + 1 = 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -1$$

O plano pedido tem equação

$$\boxed{x - y - z = 0}$$