Gabarito da Primeira Prova
MAT-2454 - Tipo A

10 de Outubro de 2011

Questão 1. Apenas uma das funções f ou g abaixo admite plano tangente a seu gráfico no ponto $P = (0,0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Determine uma equação para esse plano.

(b) Justifique cuidadosamente por que a outra função não admite plano tangente em P.

Resolução:

a) $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x,0)-g(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0.$

$\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{g(0,y)-g(0,0)}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y^2\,\mathrm{sen}\,(\frac{1}{y})-0}{y} = \lim\limits_{y\to 0} y\,\mathrm{sen}\,(\dfrac{1}{y}) = 0.$

$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{g(0+h,0+k)-g(0,0)-\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)h-\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$

$= \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{(h^2+k^2)\,\mathrm{sen}\,(\frac{k}{h^2+k^2})}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\,\mathrm{sen}\,(\dfrac{k}{h^2+k^2}) = 0$

Portanto, g é diferenciável em $(0,0)$ e

$$z - g(0,0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial g}{\partial x}(0,0)(y-0),$$

ou seja, $z = 0$ é a equação do plano tangente ao gráfico de g no ponto $(0,0,0)$.

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0.$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim\limits_{y\to 0} 0 = 0.$

$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{f(0+h,0+k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$

$= \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{h^2 k}{\sqrt{h^2+k^2}(h^2+k^2)}$ (não existe)

Portanto, f NÃO é diferenciável em $(0,0)$, ou seja, o gráfico de f não admite plano tangente no ponto $(0,0,0)$.

Questão 2. Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$. Suponha que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 2, f(1, 2))$ tem equação $2x - 3y + 2z - 1 = 0$.

(a) Determine $f(1, 2)$ e $\nabla f(1, 2)$.

(b) Sabendo que $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ é uma parametrização derivável de uma curva de nível de f, que $\gamma'(-1) \neq \vec{0}$ e que $\gamma(-1) = (1, 2)$, determine uma equação para a reta tangente à curva γ em $(1, 2)$.

a) $(1, 2, f(1,2))$ está no plano $2x - 3y + 2z - 1 = 0$

$\Rightarrow 2\cdot 1 - 3\cdot 2 + 2\cdot f(1,2) - 1 = 0 \Rightarrow f(1,2) = 5/2$

$(2, -3, 2) \,//\, \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,2), \frac{\partial f}{\partial y}(1,2), -1\right) \Rightarrow$

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = -1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{3}{2} \Rightarrow \nabla f(1,2) = (-1, 3/2)$

b) $\nabla f(1,2) \perp \gamma'(-1)$ já que γ é curva de nível derivável da função diferenciável f.

Logo, $\gamma'(-1) \,//\, (3, 2)$ e a reta tangente tem equação

$(x, y) = (1, 2) + \lambda(3, 2),\ \lambda \in \mathbb{R}$

Questão 3 (Valor: 1.5+1.0=2.5 pontos)**.** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^2$ e considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(s,t) = sf(3s^2+t^2, -s+2t).$$

(a) Determine, em função das derivadas parciais de f, as derivadas

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)(s,t).$$

(b) Calcule $\dfrac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}(-1,1)$, sabendo que

$$\nabla f(4,3) = (3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,3) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(4,3) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(4,3) = -4.$$

Solução.

(a) Fazendo $x = x(s,t) = 3s^2+t^2$ e $y = y(s,t) = -s+2t$ e usando a regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) &= f(x,y) + s\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial s}(s,t)\right] \\
&= f(3s^2+t^2,-s+2t) + s\left[6s\frac{\partial f}{\partial x}(3s^2+t^2,-s+2t) - \frac{\partial f}{\partial y}(3s^2+t^2,-s+2t)\right].
\end{aligned}$$

Como f é de classe $\mathcal{C}^2$ então g também o é e, pelo teorema de Schwarz, segue-se que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial g}{\partial t}\right)(s,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)(s,t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left\{f(x,y) + s\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial s}(s,t)\right]\right\} \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial y}{\partial t}(s,t) \\
&\quad + s\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial x}{\partial t}(x,s) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\frac{\partial y}{\partial t}(x,s)\right]\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) \\
&\quad + s\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\frac{\partial x}{\partial t}(x,s) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\frac{\partial y}{\partial t}(x,s)\right]\frac{\partial y}{\partial s}(s,t) \\
&\quad + s\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s}(s,t)\right] \\
&= 2t\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + 12s^2\left[t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)\right] \\
&\quad - 2s\left[t\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right] \\
&= 2t\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 2\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\
&\quad + 12s^2 t\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - 2s\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + (12s^2 - 2st)\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y).
\end{aligned}$$

(b) Como $x(-1,1) = 4$, $y(-1,1) = 3$ e a função g é de classe $\mathcal{C}^2$ então, substituindo os valores dados no enunciado, obtemos

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}(-1,1) = \frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t}(-1,1) = 14\sqrt{2} - 30.$$

Questão 4. A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $(5, -1)$ e a parábola $x = 2y^2 - 3y$ é a curva de nível 2 de f. Sabe-se ainda que a imagem da curva

$$\gamma(t) = \left(t^2 + 1, -t + 1, \frac{t^2 - t + 2}{t^2 - t}\right) \quad (t > 1)$$

está contida no gráfico de f.

Determine o vetor $\nabla f(5, -1)$ e calcule a derivada direcional de f em $(5, -1)$ e na direção e sentido do versor de $\vec{v} = (-1, 1)$.

Solução[1].

Denotemos $\nabla f(5, -1) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) = (a, b)$.

(i) Do fato de $x = 2y^2 - 3y$ ser a curva de nível 2 de f, podemos fazer $y = t$ e $x = 2t^2 - 3t$ e obter a parametrização $\sigma(t) = (2t^2 - 3t, t)$. Note que $\sigma(-1) = (5, -1)$, $\sigma'(t) = (4t - 3, 1)$. Também é importante notar que $f(\sigma(t)) = 2$ para todo t.

A regra da cadeia nos ajuda a derivar a última expressão: $\nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = 0, \forall t$

Em particular, para $t = -1$, obtemos

$$\nabla f(5, -1) \cdot (-7, 1) = 0 \Leftrightarrow (a, b) \cdot (-7, 1) = 0 \Leftrightarrow -7a + b = 0$$

(ii) Como a imagem da curva γ está contida no gráfico de f é possível concluir que $f(t^2 + 1, -t + 1) = \dfrac{t^2 - t + 2}{t^2 - t}$, para todo t. Derivando em relação a t, obtemos:

$$\nabla f(t^2 + 1, -t + 1) \cdot (2t, -1) = \frac{(2t - 1)(-2)}{(t^2 - t)^2} \quad \text{(confira!)}$$

Para $t = 2$ obtemos

$$\nabla f(5, -1) \cdot (4, -1) = \frac{-6}{4} \Leftrightarrow 4a - b = -\frac{3}{2}$$

Portanto, $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{7}{2}$ e $\nabla f(5, -1) = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$.

Finalmente, como f é diferenciável, vale a fórmula $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(5, -1) = \nabla f(5, -1) \cdot \dfrac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$. Logo,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(5, -1) = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

[1] veja outra solução na prova tipo B

Questão 4. A função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $(-1, 5)$ e a parábola $y = 2x^2 - 3x$ é a curva de nível 2 de f. Sabe-se ainda que a imagem da curva

$$\gamma(t) = \left(-t + 1, t^2 + 1, \frac{t^2 - t + 2}{t^2 - t}\right) \quad (t > 1)$$

está contida no gráfico de f.

Determine o vetor $\nabla f(-1, 5)$ e calcule a derivada direcional de f em $(-1, 5)$ e na direção e sentido do versor de $\vec{v} = (-1, 1)$.

Solução[2].

(i) Como a parábola $y = 2x^2 - 3x$ é curva de nível 2 de f e o ponto $P = (-1, 5)$ pertence à parábola, podemos concluir que $f(-1, 5) = 2$ e que o vetor gradiente $\nabla f(-1, 5)$ é ortogonal à parábola no ponto P. A inclinação da reta tangente à parábola em P pode ser obtida pela derivada $y' = 4x - 3$. Para $x = -1$, a derivada é igual a -7. Assim, o vetor $(1, -7)$ tem é paralelo à reta tangente à parábola em P e portanto, $\nabla f(P) = (7\alpha, \alpha),$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) Por outro lado, notamos que $\gamma(2) = (-1, 5, 2) = (-1, 5, f(-1, 5)) = Q$. Como a imagem da curva γ está contida no gráfico de f, a reta tangente à curva γ em Q está contida no plano tangente ao gráfico de f em Q. (A existência do plano tangente é garantida pelo fato de f ser diferenciável em P.) Sendo assim, o vetor $\gamma\,'(2)$ é ortogonal ao vetor $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(P), \frac{\partial f}{\partial x}(P), -1\right)$, que é normal ao plano tangente ao gráfico de f em Q.

Como $\gamma\,'(t) = \left(-1, 2t, \dfrac{-4t + 2}{(t^2 - t)^2}\right)$ e $\gamma\,'(2) = \left(-1, 4, \frac{-6}{4}\right)$, temos:

$$\gamma\,'(2) \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \left(-1, 4, -\frac{3}{2}\right) \cdot (7\alpha, \alpha, -1) = 0 \Leftrightarrow -7\alpha + 4\alpha + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Portanto, $\nabla f(-1, 5) = (\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$.

Podemos calcular a derivada direcional pedida usando a fórmula $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \nabla f(P) \cdot \vec{u}$ (que vale sempre que f for diferenciável e $\vec{u}$ for unitário), obtendo $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

[2]veja outra resolução na prova tipo A