A

Questão 1: (2 pts) Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável em $(1,2)$ tal que $f(1,2)=1$. Sabe-se também que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,2)=11$ e que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,2)=-2$, onde $\vec{u}=(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ e $\vec{v}=(\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$.

(a) Ache a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,2,1)$.

(b) Qual o valor máximo que uma derivada direcional de f no ponto $(1,2)$ pode assumir?

a) $\nabla f(1,2) = \left(\frac{\delta f}{\delta x}(1,2), \frac{\delta f}{\delta y}(1,2) \right) = (a,b)$

como f é diferenciável em $(1,2)$:

$11 = \nabla f(1,2) \cdot \vec{u} = \frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b$ e

$-2 = \nabla f(1,2) \cdot \vec{v} = \frac{4}{5}a - \frac{3}{5}b$

$$\begin{cases} 55 = 3a + 4b \\ -10 = 4a - 3b \end{cases} \iff \begin{cases} a = 5 \\ b = 10 \end{cases} \therefore \nabla f(1,2) = (5,10)$$

Logo, o plano pedido é:

$z = f(1,2) + \frac{\delta f}{\delta x}(1,2)(x-1) + \frac{\delta f}{\delta y}(1,2).(y-2)$, ou seja:

$z = 5x + 10y - 24$

b) O valor máximo que $\frac{\delta f}{\delta w}(1,2)$ pode assumir é

$\|\nabla f(1,2)\| = \sqrt{5^2+10^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

P2 - Cálculo II - Gabarito

18.10.10

Turma A e turma B

Questão 2: (3 pts) Seja $f(x,y) = (xy)^{1/3}$.

(a) Calcule as derivadas parciais de f nos pontos (x,y) tais que $xy \neq 0$.

(b) Calcule as derivadas parciais de f em $(0,0)$.

(c) Existem $f_x(0,b)$ e $f_y(a,0)$ quando a e b são não-nulos?

(d) Determine os pontos em que f é diferenciável. Justifique.

(a) $f(x,y) = (xy)^{1/3} \Rightarrow \begin{cases} f_x(x,y) = \frac{1}{3}(xy)^{-2/3} \cdot y = \frac{1}{3}\frac{y}{(xy)^{2/3}}, & xy \neq 0 \\ f_y(x,y) = \frac{1}{3}(xy)^{-2/3} \cdot x = \frac{1}{3}\frac{x}{(xy)^{2/3}}, & xy \neq 0 \end{cases}$

(b) $f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \therefore f_x(0,0) = 0$

$f_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0-0}{k} = 0 \therefore f_y(0,0) = 0$

(c) $f_x(0,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,b) - f(0,b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(hb)^{1/3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{b^{1/3}}{h^{2/3}} = \begin{cases} +\infty, & b > 0 \\ -\infty, & b < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \nexists\, f_x(0,b)$, se $b \neq 0$.

$f_y(a,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,k) - f(a,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{(ak)^{1/3}}{k} = \lim \frac{a^{1/3}}{k^{2/3}} = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \nexists\, f_y(a,0)$, se $a \neq 0$.

(d) • No $(0,0)$: $\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \overbrace{f_x(0,0)}^{=0}h - \overbrace{f_y(0,0)}^{=0}k}{\|(h,k)\|}$

$= \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{(hk)^{1/3}}{\sqrt{h^2+k^2}}$.

Para $h = k$, $\lim_{(h,h) \to (0,0)} \frac{E(h,h)}{\|(h,h)\|} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{2/3}}{\sqrt{2}\,|h|} = \lim \frac{1}{\sqrt{2}\,|h|^{1/3}} = +\infty$.

$\Rightarrow f$ não é diferenciável no $(0,0)$.

• Em $(a,0)$, com $a \neq 0$, f não é diferenciável, pois $\nexists\, f_y(a,0)$.

• Em $(0,b)$, com $b \neq 0$, f não é diferenciável, pois $\nexists\, f_x(0,b)$.

• Em (x,y), $xy \neq 0$: as derivadas parciais existem e são contínuas $\Rightarrow f$ é diferenciável

Conclusão: f é diferenciável no conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy \neq 0\}$.

Questão 3: Dada uma função $f(x,y)$ de classe C^2, defina $g(r,\theta) = r^2 f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

(a) Expresse $g_{rr}(r,\theta)$ em termos das derivadas parciais de f.

(b) Sabendo que $f(0,0) = 1$, determine $g_{rr}(0,\theta)$ para um valor arbitrário de θ.

(a) Como f é de classe C^2, f é também de classe C^1. Além disso, as derivadas parciais f_x e f_y também são de classe C^1. Logo, podemos aplicar a regra da cadeia às composições de f, f_x e f_y com a aplicação $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. E como f_{xy} e f_{yx} são contínuas, então $f_{xy} = f_{yx}$. Vamos usar todos estes fatos nos cálculos seguintes.

Aplicando a regra da cadeia a $f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, vem:

$$g_r(r,\theta) = 2rf(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + r^2 f_x(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta + r^2 f_y(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Aplicando a regra da cadeia a $f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, a $f_x(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ e a $f_y(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, vem:

$$\begin{aligned}
g_{rr}(r,\theta) &= 2f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + 2rf_x(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta + 2rf_y(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta + \\
&\quad 2rf_x(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta + r^2 f_{xx}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos^2\theta + r^2 f_{xy}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \\
&\quad 2rf_y(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta + r^2 f_{yy}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}^2\,\theta + r^2 f_{yx}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \\
&= 2f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + 4r\cos\theta f_x(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + 4r\,\mathrm{sen}\,\theta f_y(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + \\
&\quad r^2\cos^2\theta f_{xx}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta f_{yy}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + 2r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta f_{xy}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta).
\end{aligned}$$

(b) Fazendo $r = 0$ na equação acima e usando que $f(0,0) = 1$, vem: $g_{rr}(0,\theta) = 2f(0,0) + 0 = 2$.

Questão 4: (2,5 pts) A curva de nível 1 da função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é parametrizada por $\gamma(t) = (t, 2t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. A curva $\sigma(u) = (-u, u^3, u^6 - u^5 - 2u^4 + 1)$, $u \in \mathbb{R}$, tem sua imagem contida no gráfico de f.

(a) Determine o vetor tangente à curva σ no ponto $(-2, 8, 1)$.

(b) Determine o vetor tangente à curva γ no ponto $(-2, 8)$.

(c) Calcule $\nabla f(-2, 8)$.

(a) $\sigma(2) = (-2, 8, 1)$; $\sigma'(u) = (-1, 3u^2, 6u^5 - 5u^4 - 8u^3)$ e
$\sigma'(2) = (-1, 12, 48)$ $\rightsquigarrow$ vetor tangente à curva σ no ponto $\sigma(2)$

(b) $\gamma(-2) = (-2, 8)$; $\gamma'(t) = (1, 4t)$ e $\gamma'(-2) = (1, -8)$
$\gamma'(-2)$ é o vetor tangente à curva γ no ponto $\gamma(-2)$.

(c) Como f é diferenciável no ponto $(-2, 8)$, temos:

- $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(-2,8), \frac{\partial f}{\partial y}(-2,8), -1\right)$ é um vetor normal ao plano tangente ao gráfico de f no ponto $(-2, 8, 1)$.
  Logo, $\vec{n} \cdot \sigma'(2) = 0$ (já que $\mathrm{Im}(\sigma) \subset \mathrm{Graf}(f)$), ou seja, $-\frac{\partial f}{\partial x}(-2,8) + 12\frac{\partial f}{\partial y}(-2,8) - 48 = 0$ (I)

- $\nabla f(-2,8)$ é normal ao vetor $\gamma'(-2)$ (já que γ é a curva de nível 1 de f e $\gamma(-2) = (-2,8)$).
  Logo, $\frac{\partial f}{\partial x}(-2,8) \cdot 1 - \frac{\partial f}{\partial y}(-2,8) \cdot 8 = 0$ (II)

De I e II, concluímos: $\frac{\partial f}{\partial y}(-2,8) = 12$ e
$\frac{\partial f}{\partial x}(-2,8) = 96$

$\nabla f(-2,8) = (96, 12)$

Questão 1: (2 pts) Seja $f(x, y)$ uma função diferenciável em $(2, 1)$ tal que $f(2, 1) = 1$. Sabe-se também que $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2, 1) = 11$ e que $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2, 1) = -2$, onde $\vec{u} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ e $\vec{v} = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

(a) Ache a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 1, 1)$.

(b) Qual o valor máximo que uma derivada direcional de f no ponto $(2, 1)$ pode assumir?

a) $\nabla f(2,1) = \left(\frac{\delta f}{\delta x}(2,1), \frac{\delta f}{\delta y}(2,1) \right) = (a,b)$

como f é diferenciável em $(2,1)$:

$11 = \frac{\delta f}{\delta u}(2,1) = \nabla f(2,1) \cdot \vec{u} = \frac{4}{5}a + \frac{3}{5}b$ e

$-2 = \frac{\delta f}{\delta v}(2,1) = \nabla f(2,1) \cdot \vec{v} = -\frac{3}{5}a + \frac{4}{5}b$

$$\begin{cases} 4/5\, a + 3/5\, b = 11 \\ -3/5\, a + \frac{4}{5} = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 10 \\ b = 5 \end{cases} \therefore \nabla f(2,1) = (10,5)$$

Logo, o plano pedido é:

$z = f(2,1) + \frac{\delta f}{\delta x}(2,1)(x-2) + \frac{\delta f}{\delta y}(2,1)(y-1)$, ou seja

$z = 10x + 5y - 24$

b) O valor máximo que $\frac{\delta f}{\delta w}(2,1)$ pode assumir é

$\|\nabla f(2,1)\| = \sqrt{10^2 + 5^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$

P2 - Cálculo II - Gabarito

18.10.10

Turma A e turma B

Questão 2: (3 pts) Seja $f(x,y) = (xy)^{1/3}$.

(a) Calcule as derivadas parciais de f nos pontos (x,y) tais que $xy \neq 0$.

(b) Calcule as derivadas parciais de f em $(0,0)$.

(c) Existem $f_x(0,b)$ e $f_y(a,0)$ quando a e b são não-nulos?

(d) Determine os pontos em que f é diferenciável. Justifique.

(a) $f(x,y) = (xy)^{1/3} \Rightarrow \begin{cases} f_x(x,y) = \frac{1}{3}(xy)^{-2/3} \cdot y = \frac{1}{3}\frac{y}{(xy)^{2/3}}, & xy \neq 0 \\ f_y(x,y) = \frac{1}{3}(xy)^{-2/3} \cdot x = \frac{1}{3}\frac{x}{(xy)^{2/3}}, & xy \neq 0 \end{cases}$

(b) $f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \therefore f_x(0,0) = 0$

$f_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0 \therefore f_y(0,0) = 0$

(c) $f_x(0,b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,b) - f(0,b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(hb)^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{b^{1/3}}{h^{2/3}} = \begin{cases} +\infty, & b>0 \\ -\infty, & b<0 \end{cases}$

$\Rightarrow \nexists\, f_x(0,b)$, se $b \neq 0$.

$f_y(a,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(a,k) - f(a,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{(ak)^{1/3}}{k} = \lim \frac{a^{1/3}}{k^{2/3}} = \begin{cases} +\infty, & a>0 \\ -\infty, & a<0 \end{cases}$

$\Rightarrow \nexists\, f_y(a,0)$, se $a \neq 0$.

(d) • No $(0,0)$: $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - \overbrace{f_x(0,0)}^{=0}h - \overbrace{f_y(0,0)}^{=0}k}{\|(h,k)\|}$

$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(hk)^{1/3}}{\sqrt{h^2+k^2}}$.

Para $h = k$, $\lim_{(h,h)\to(0,0)} \frac{E(h,h)}{\|(h,h)\|} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{2/3}}{\sqrt{2}\,|h|} = \lim \frac{1}{\sqrt{2}\,|h|^{1/3}} = +\infty$.

$\Rightarrow f$ não é diferenciável no $(0,0)$.

• Em $(a,0)$, com $a \neq 0$, f não é diferenciável, pois $\nexists\, f_y(a,0)$.

• Em $(0,b)$, com $b \neq 0$, f não é diferenciável, pois $\nexists\, f_x(0,b)$.

• Em (x,y), $xy \neq 0$: as derivadas parciais existem e são contínuas $\Rightarrow f$ é diferenciável

Conclusão: f é diferenciável no conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \neq 0\}$.

Questão 3: Dada uma função $f(x,y)$ de classe C^2, defina $g(r,\theta) = r^2 f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$.

(a) Expresse $g_{rr}(r,\theta)$ em termos das derivadas parciais de f.

(b) Sabendo que $f(0,0) = 1$, determine $g_{rr}(0,\theta)$ para um valor arbitrário de θ.

(a) Como f é de classe C^2, f é também de classe C^1. Além disso, as derivadas parciais f_x e f_y também são de classe C^1. Logo, podemos aplicar a regra da cadeia às composições de f, f_x e f_y com a aplicação $(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$. E como f_{xy} e f_{yx} são contínuas, então $f_{xy} = f_{yx}$. Vamos usar todos estes fatos nos cálculos seguintes.

Aplicando a regra da cadeia a $f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, vem:

$$g_r(r,\theta) = 2rf(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + r^2 f_x(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta + r^2 f_y(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Aplicando a regra da cadeia a $f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, a $f_x(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ e a $f_y(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$, vem:

$$\begin{gathered}
g_{rr}(r,\theta) = 2f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + 2rf_x(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta + 2rf_y(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta + \\
2rf_x(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta + r^2 f_{xx}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos^2\theta + r^2 f_{xy}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + \\
2rf_y(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta + r^2 f_{yy}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}^2\theta + r^2 f_{yx}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta \\
= 2f(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + 4r\cos\theta f_x(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + 4r\,\mathrm{sen}\,\theta f_y(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + \\
r^2\cos^2\theta f_{xx}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + r^2\,\mathrm{sen}^2\theta f_{yy}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) + 2r^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta f_{xy}(r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta).
\end{gathered}$$

(b) Fazendo $r = 0$ na equação acima e usando que $f(0,0) = 1$, vem: $g_{rr}(0,\theta) = 2f(0,0) + 0 = 2$.

Questão 4: (2,5 pts) A curva de nível 1 da função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é parametrizada por $\gamma(t) = (2t^2, t)$, $t \in \mathbb{R}$. A curva $\sigma(u) = (u^3, -u, u^6 - u^5 - 2u^4 + 1)$, $u \in \mathbb{R}$, tem sua imagem contida no gráfico de f.

(a) Determine o vetor tangente à curva σ no ponto $(8, -2, 1)$.

(b) Determine o vetor tangente à curva γ no ponto $(8, -2)$.

(c) Calcule $\nabla f(8, -2)$.

(a) $\sigma(2) = (8, -2, 1)$; $\sigma'(u) = (3u^2, -1, 6u^5 - 5u^4 - 8u^3)$ e $\boxed{\sigma'(2) = (12, -1, 48)}$: este é o vetor tangente à curva σ no ponto $\sigma(2)$

(b) $\gamma(-2) = (8, -2)$; $\gamma'(t) = (4t, 1)$ e $\gamma'(-2) = (-8, 1)$.
$\gamma'(-2)$ é o vetor tangente à curva γ no ponto $\gamma(-2)$

(c) Como f é diferenciável no ponto $(8, -2)$ temos:

- $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(8,-2), \frac{\partial f}{\partial y}(8,-2), -1\right)$ é um vetor normal ao plano tangente ao gráfico de f no ponto $(8, -2, 1)$.
  Logo, $\vec{n} \cdot \sigma'(2) = 0$ (já que $Im(\sigma) \subset Graf(f)$), ou seja, $12 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(8,-2) - 1 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(8,-2) - 48 = 0$ (I)
- $\nabla f(8,-2)$ é perpendicular ao vetor $\gamma'(-2)$ (já que γ é curva de nível 1 de f e $\gamma(-2) = (8,-2)$). Portanto,

$$0 = \nabla f(8,-2) \cdot \gamma'(-2) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(8,-2) \cdot (-8) + \frac{\partial f}{\partial y}(8,-2) = 0 \quad \text{(II)}$$

De (I) e (II) temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(8,-2) = 12, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(8,-2) = 96,$$

Ou seja, $\nabla f(8,-2) = (12, 96)$