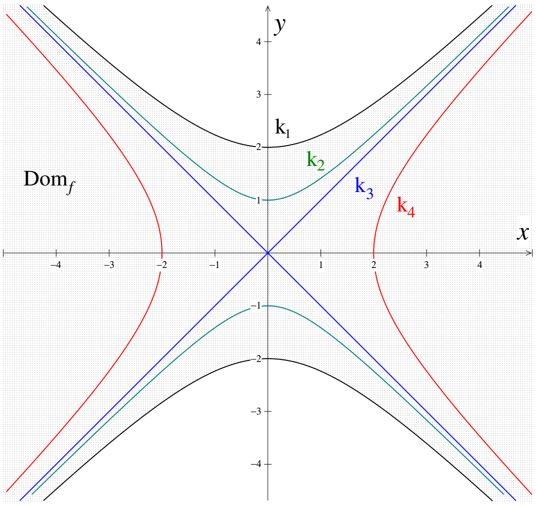
Questão 1. (3,0) Seja $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 + 4}$. Utilizando o sistema de coordenadas abaixo:

a) determine e represente o domínio máximo da função f;

b) determine equações para as curvas de nível k de f para $k = 0$, $k = \sqrt{3}$, $k = 2$ e $k = \sqrt{8}$. Faça o esboço dessas curvas.



a) $\text{Dom}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 + 4 \geq 0\}$.

$x^2 - y^2 + 4 \geq 0 \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 \geq -4 \;\Rightarrow\; \left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \leq 1 \;\Rightarrow$ o domínio de f é a região do plano compreendida entre as componentes da hipérbole $\left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1$.

b) $\sqrt{x^2 - y^2 + 4} = k \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 + 4 = k^2 \;\Rightarrow\; \boxed{x^2 - y^2 = k^2 - 4}$.

i) $(k_1 = 0) \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 = (0)^2 - 4 \;\Rightarrow\; y^2 - x^2 = 4 \;\Rightarrow\; \boxed{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1}$ (hipérbole - que é o bordo do domínio de f).

ii) $(k_2 = \sqrt{3}) \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 = (\sqrt{3})^2 - 4 \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 = -1 \;\Rightarrow\; \boxed{y^2 - x^2 = 1}$. (hipérbole)

iii) $(k_3 = 2) \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 = (2)^2 - 4 \;\Rightarrow\; \boxed{x^2 - y^2 = 0} \;\Rightarrow\; (x + y)(x - y) = 0$. (par de retas concorrentes $y = -x$ e $y = x$)

iv) $(k_4 = \sqrt{8}) \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 = (\sqrt{8})^2 - 4 \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 = 4 \;\Rightarrow\; \boxed{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1}$. (hipérbole)

(4,0) **Questão 2.** Considere a esfera $x^2+(y-1)^2+z^2=1$ e a parte do cone $x^2+y^2-z^2=0$ com $z \geq 0$. Seja C a curva dada pela intersecção destas superfícies.

a) Determine uma parametrização para a curva C, explicitando o seu domínio.

b) Escreva a equação da reta tangente à curva no ponto $P=(0,1,1)$.

c) Determine os pontos sobre a curva C mais distantes da origem.

Solução.

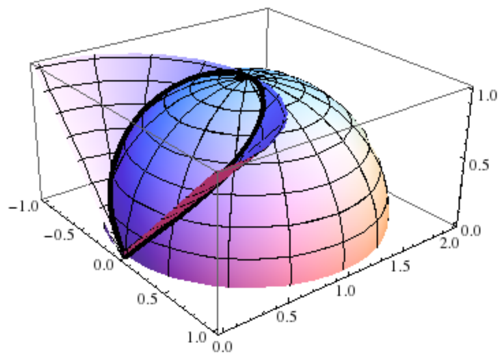
a) Podemos isolar $z^2 = x^2+y^2$ na equação do cone e substituir na equação da esfera, obtendo $x^2+y^2-y=0$, que é uma equação que envolve apenas as variáveis x e y. Esta última equação é equivalente a

$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

Podemos escolher $x(t)=\dfrac{1}{2}\cos t,\;\; y(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} t$ e, substituindo na equação do cone, obtemos $z^2(t)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} t$. Como $z\geq 0$, temos $z(t)=\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} t}$.

Portanto, <u>uma</u> possível parametrização é

$$\gamma(t)=\left(\frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sen} t, \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sen} t}\right), t\in[0,2\pi]$$



b) Observamos que $P=(0,1,1)=\gamma\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. Portanto, o vetor tangente à curva em P será dado por $\gamma'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Como $\gamma'(t)=\left(-\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} t, \dfrac{1}{2}\cos t, \dfrac{\sqrt{2}\cos t}{4\sqrt{1+\operatorname{sen} t}}\right)$, o vetor tangente é $\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$.

Assim, uma equação para a reta tangente é

$$(x,y,z)=(0,1,1)+\lambda(-1,0,0), \lambda\in\mathbf{R}$$

c) A distância entre a origem e um ponto qualquer $\gamma(t)$ da curva é dada por

$$d(t)=\sqrt{\left[\frac{1}{2}\cos t\right]^2+\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right]^2+\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}=\sqrt{1+\operatorname{sen} t}$$

Como a função raiz quadrada é crescente, o valor máximo da função d será obtido para o valor de t que torna máximo o valor de $1+\operatorname{sen} t$, a saber, $t=\dfrac{\pi}{2}$. Assim, o ponto da curva mais distante da origem é $\gamma\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=(0,1,1)$.

Questão 3. (3,0)

a) Decida, justificando, se existe ou não $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\ln(3x^2+y^2)$.

b) Seja f a função dada por

$$f(x,y) = x^2\ln(3x^2+y^2)\,\text{arctg}\left(\frac{1}{y^2-x^2}\right).$$

Verifique se os limites abaixo existem e, em caso afirmativo, determine seu valor. Justifique.

b.1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$; **b.2)** $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$.

Solução.

a) Para todo $(x,y)\neq(0,0)$ em $\mathbb{R}^2$ temos

$$x^2\ln(3x^2+y^2) = \frac{x^2}{3x^2+y^2}(3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2).$$

O fator $\frac{x^2}{3x^2+y^2}$ é limitado, pois $0 < x^2 < 3x^2+y^2$ e então $0 < \frac{x^2}{3x^2+y^2} < 1$ (tente encontrar um limitante superior menor).

A função $u(x,y) = 3x^2+y^2$ é contínua e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = 0$. Como a função ln é contínua temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2) = \lim_{u\to 0} u\ln u.$$

Sendo este último limite uma indeterminação do tipo "$0\cdot(-\infty)$", podemos aplicar a regra de L'Hospital obtendo

$$\lim_{u\to 0} u\ln u = \lim_{u\to 0}\frac{\ln u}{\frac{1}{u}} = \lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = \lim_{u\to 0} -u = 0.$$

Com isso temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\ln(3x^2+y^2) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2}{3x^2+y^2}}_{\text{limitado}}\underbrace{(3x^2+y^2)\ln(3x^2+y^2)}_{\to 0} = 0.$$

b) Sendo $g(x,y) = x^2\ln(3x^2+y^2)$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 \qquad \text{e} \qquad g(1,1) = \ln 4.$$

b.1) Como $-\frac{\pi}{2} < \text{arctg}(t) < \frac{\pi}{2}$ para todo $t\in\mathbb{R}$ temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{g(x,y)}_{\to 0}\underbrace{\text{arctg}\left(\frac{1}{y^2-x^2}\right)}_{\text{limitado}} = 0.$$

b.2) Lembrando que $\lim_{t\to\infty}\text{arctg}(t) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{t\to-\infty}\text{arctg}(t) = -\frac{\pi}{2}$, consideramos as curvas contínuas $\gamma_1(t) = (1,t)$, com $t\le 1$ e $\gamma_2(t) = (1,t)$, com $t \ge 1$. Obtemos então

$$\lim_{t\to 1^-} f\big(\gamma_1(t)\big) = \lim_{t\to 1^-}\ln(3+t^2)\,\text{arctg}\left(\frac{1}{t^2-1}\right) = -\frac{\pi\ln 4}{2}.$$

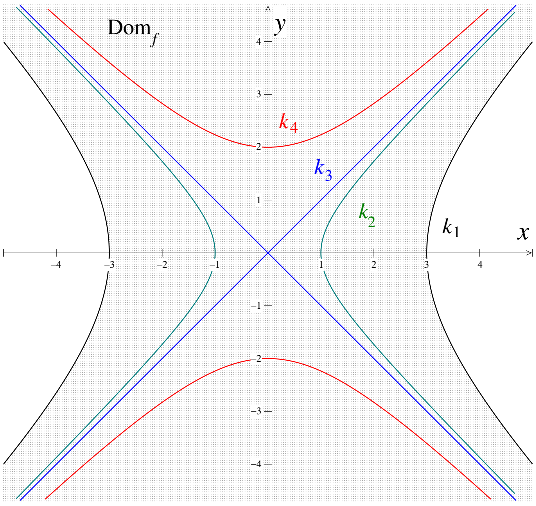
$$\lim_{t\to 1^+} f\big(\gamma_2(t)\big) = \lim_{t\to 1^+}\ln(3+t^2)\,\text{arctg}\left(\frac{1}{t^2-1}\right) = \frac{\pi\ln 4}{2}.$$

Portanto não existe $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$.

Questão 1. (3,0) Seja $f(x,y) = \sqrt{y^2 - x^2 + 9}$. Utilizando o sistema de coordenadas abaixo:

a) determine e represente o domínio máximo da função f;

b) determine equações para as curvas de nível k de f para $k = 0$, $k = \sqrt{8}$, $k = 3$ e $k = \sqrt{13}$. Faça o esboço dessas curvas.



a) $\text{Dom}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2 + 9 \geq 0\}$.

$y^2 - x^2 + 9 \geq 0 \;\Rightarrow\; y^2 - x^2 \geq -9 \;\Rightarrow\; \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 \leq 1 \;\Rightarrow$ o domínio de f é a região do plano compreendida entre as componentes da hipérbole $\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$.

b) $\sqrt{y^2 - x^2 + 9} = k \;\Rightarrow\; y^2 - x^2 + 9 = k^2 \;\Rightarrow\; \boxed{y^2 - x^2 = k^2 - 9}$.

i) $(k_1 = 0) \;\Rightarrow\; y^2 - x^2 = (0)^2 - 9 \;\Rightarrow\; x^2 - y^2 = 9 \;\Rightarrow\; \boxed{\left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1}$ (hipérbole - que é o bordo do domínio de f).

ii) $(k_2 = \sqrt{8}) \;\Rightarrow\; y^2 - x^2 = (\sqrt{8})^2 - 9 \;\Rightarrow y^2 - x^2 = -1 \;\Rightarrow\; \boxed{x^2 - y^2 = 1}$. (hipérbole)

iii) $(k_3 = 3) \;\Rightarrow\; y^2 - x^2 = (3)^2 - 9 \;\Rightarrow\; \boxed{y^2 - x^2 = 0} \;\Rightarrow\; (y + x)(y - x) = 0$. (par de retas concorrentes $y = -$ e $y = x$)

iv) $(k_4 = \sqrt{13}) \;\Rightarrow\; y^2 - x^2 = (\sqrt{13})^2 - 9 \;\Rightarrow\; y^2 - x^2 = 4 \;\Rightarrow\; \boxed{\left(\frac{y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = 1}$. (hipérbole)

(4,0) **Questão 2.** Considere a esfera $(x-1)^2+y^2+z^2=1$ e a parte do cone $x^2+y^2-z^2=0$ com $z \geq 0$. Seja C a curva dada pela intersecção destas superfícies.

a) Determine uma parametrização para a curva C, explicitando o seu domínio.

b) Escreva a equação da reta tangente à curva no ponto $P=(1,0,1)$.

c) Determine os pontos sobre a curva C mais distantes da origem.

Solução.

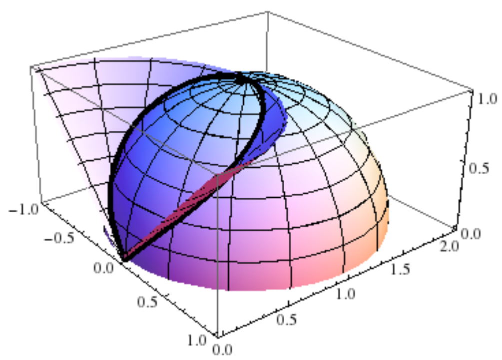
a) Podemos isolar $z^2 = x^2+y^2$ na equação do cone e substituir na equação da esfera, obtendo $x^2-x+y^2=0$, que é uma equação que envolve apenas as variáveis x e y. Esta última equação é equivalente a

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$$

Podemos escolher $x(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t,\ \ y(t)=\frac{1}{2}\operatorname{sen} t,$ e, substituindo na equação do cone, obtemos $z^2(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t$. Como $z\geq 0$, temos $z(t)=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t}$.

Portanto, <u>uma</u> possível parametrização é

$$\gamma(t)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t,\ \frac{1}{2}\operatorname{sen} t,\ \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t}\right), t\in[-\pi,\pi]$$



b) Observamos que $P=(1,0,1)=\gamma(0)$. Portanto, o vetor tangente à curva em P será dado por $\gamma'(0)$. Como $\gamma'(t)=\left(-\frac{1}{2}\operatorname{sen} t,\frac{1}{2}\cos t,\frac{-\sqrt{2}\operatorname{sen} t}{4\sqrt{1+\cos t}}\right)$, o vetor tangente é $\left(0,\frac{1}{2},0\right)$.
Assim, uma equação para a reta tangente é

$$(x,y,z)=(1,0,1)+\lambda(0,1,0), \lambda\in\mathbf{R}$$

c) A distância entre a origem e um ponto qualquer $\gamma(t)$ da curva é dada por

$$d(t)=\sqrt{\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t\right]^2+\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen} t\right]^2+\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2}=\sqrt{1+\cos t}$$

Como a função raiz quadrada é crescente, o valor máximo da função d será obtido para o valor de t que torna máximo o valor de $1+\cos t$, a saber, $t=0$. Assim, o ponto da curva mais distante da origem é $\gamma(0)=(1,0,1)$.

Questão 3. (3,0)

a) Decida, justificando, se existe ou não $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \ln(5x^2+y^2)$.

b) Seja f a função dada por

$$f(x,y) = x^2 \ln(5x^2+y^2) \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-y^2}\right).$$

Verifique se os limites abaixo existem e, em caso afirmativo, determine seu valor. Justifique.

b.1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$; **b.2)** $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$.

Solução.

a) Para todo $(x,y) \neq (0,0)$ em $\mathbb{R}^2$ temos

$$x^2 \ln(5x^2+y^2) = \frac{x^2}{5x^2+y^2}(5x^2+y^2)\ln(5x^2+y^2).$$

O fator $\frac{x^2}{5x^2+y^2}$ é limitado, pois $0 < x^2 < 5x^2+y^2$ e então $0 < \frac{x^2}{5x^2+y^2} < 1$ (tente encontrar um limitante superior menor).

A função $u(x,y) = 5x^2+y^2$ é contínua e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = 0$. Como a função ln é contínua temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (5x^2+y^2)\ln(5x^2+y^2) = \lim_{u\to 0} u \ln u.$$

Sendo este último limite uma indeterminação do tipo "$0 \cdot (-\infty)$", podemos aplicar a regra de L'Hospital obtendo

$$\lim_{u\to 0} u\ln u = \lim_{u\to 0} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} = \lim_{u\to 0} \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = \lim_{u\to 0} -u = 0.$$

Com isso temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\ln(5x^2+y^2) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2}{5x^2+y^2}}_{\text{limitado}} \underbrace{(5x^2+y^2)\ln(5x^2+y^2)}_{\to 0} = 0.$$

b) Sendo $g(x,y) = x^2\ln(5x^2+y^2)$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 \qquad \text{e} \qquad g(1,1) = \ln 6.$$

b.1) Como $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}(t) < \frac{\pi}{2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{g(x,y)}_{\to 0} \underbrace{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2-y^2}\right)}_{\text{limitado}} = 0.$$

b.2) Lembrando que $\lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg}(t) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{t\to-\infty} \operatorname{arctg}(t) = -\frac{\pi}{2}$, consideramos as curvas contínuas $\gamma_1(t) = (1,t)$, com $t \le 1$ e $\gamma_2(t) = (1,t)$, com $t \ge 1$. Obtemos então

$$\lim_{t\to 1^-} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to 1^-} \ln(5+t^2)\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-t^2}\right) = \frac{\pi \ln 6}{2}.$$

$$\lim_{t\to 1^+} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to 1^+} \ln(5+t^2)\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1-t^2}\right) = -\frac{\pi \ln 6}{2}.$$

Portanto não existe $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$.