-A- e -B-

Questão 1.

a) (1,5) Seja $p(x)$ o polinômio de Taylor de ordem 4 da função $f(x) = \sqrt{x}$ em torno do ponto $x_0 = 1$. Determine $p(x)$ e mostre que:

$$|f(x) - p(x)| < \frac{7}{2^8}(x-1)^5, \text{ para todo } x > 1.$$

b) (0,5) Use o item (a), com $x = 1 + t^4$, para encontrar um valor aproximado de $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+t^4}\, dt$.

c) (0,5) Verifique que o erro na estimativa feita em (b) é inferior a $\frac{1}{2^{30}}$.

$f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1 \Rightarrow f(x_0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2} \Rightarrow f''(x_0) = -\frac{1}{4}$

$f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-5/2} \Rightarrow f'''(x_0) = \frac{3}{8}$

$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16} x^{-7/2} \Rightarrow f^{(4)}(x_0) = -\frac{15}{16}$

$f^{(5)}(x) = \frac{15}{16} \cdot \frac{7}{2} x^{-9/2} = \frac{15 \cdot 7}{2^5} x^{-\frac{9}{2}}$.

Portanto:

(a) $$\boxed{p(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{3}{8}\frac{(x-1)^3}{3!} - \frac{15}{16}\frac{(x-1)^4}{4!}}$$

Sabemos que $f(x) - p(x) = f^{(5)}(\bar{x}) \frac{(x-1)^5}{5!}$, para algum $\bar{x}$ entre 1 e x.

Se $x > 1$, então $1 < \bar{x} < x$

$$\Rightarrow 1 < \sqrt{\bar{x}} < \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 1 < (\sqrt{\bar{x}})^9 < (\sqrt{x})^9$$

$$\Rightarrow (0 <) \frac{1}{(\sqrt{\bar{x}})^9} < 1$$

Logo,

$$|f(x) - p(x)| = \frac{15 \cdot 7}{2^5} (\bar{x})^{-9/2} \frac{(x-1)^5}{5!} < \frac{\cancel{15} \cdot 7}{2^5} \cdot \frac{(x-1)^5}{\cancel{5} \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot 2}$$

$$\Rightarrow \boxed{|f(x) - p(x)| < \frac{7}{2^8}(x-1)^5 \quad , \text{ se } x > 1.}$$

Questaõ 1 - continuação

Fazendo $x = 1 + t^4$ $\left(\Rightarrow x - 1 = t^4\right)$ temos:

$$\left| f(1+t^4) - p(1+t^4) \right| < \frac{7}{2^8} (t^4)^5 = \frac{7}{2^8} t^{20}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{2^8} t^{20} < \sqrt{1+t^4} - p(1+t^4) < \frac{7}{2^8} t^{20}.$$

Calculando-se a integral, iremos obter:

$$\underbrace{-\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{7}{2^8} t^{20} dt}_{(*)} \leq \int_0^{1/2} \sqrt{1+t^4}\, dt - \int_0^{\frac{1}{2}} p(1+t^4)\, dt \leq \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{7}{2^8} t^{20} dt}_{(*)},$$

$$(*) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{7}{2^8} t^{20} dt = \frac{\cancel{7}}{2^8} \frac{t^{21}}{\cancel{21}} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{21} < \frac{1}{2^{30}}$$

Portanto,

$$-\frac{1}{2^{30}} < \int_0^{1/2} \sqrt{1+t^4}\, dt - \int_0^{1/2} p(1+t^4)\, dt < \frac{1}{2^{30}},$$

ou seja, $\boxed{\left| \int_0^{1/2} \sqrt{1+t^4}\, dt - \int_0^{1/2} p(1+t^4)\, dt \right| < \frac{1}{2^{30}}}$ (c)

e um valor aproximado para $\int_0^{1/2} \sqrt{1+t^4}\, dt$ é

$$\int_0^{\frac{1}{2}} p(1+t^4)\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{2} t^4 - \frac{1}{4} \frac{(t^4)^2}{2} + \frac{3}{8} \frac{(t^4)^3}{3!} - \frac{15}{16} \frac{(t^4)^4}{4!} \right] dt =$$

$$= \int_0^{1/2} \left[1 + \frac{t^4}{2} - \frac{1}{8} t^8 + \frac{\cancel{3}}{8} \cdot \frac{1}{\cancel{3!}} t^{12} - \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4!} t^{16} \right] dt =$$

$$= \left[t + \frac{t^5}{10} - \frac{t^9}{9 \cdot 8} + \frac{1}{16} \frac{t^{13}}{13} - \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4!} \frac{t^{17}}{17} \right]_0^{1/2} =$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{1}{72} \cdot \frac{1}{2^9} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2^{13}} - \frac{15}{2^4} \cdot \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{2^{17}}}$$

(b)

Questão 2. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{3+2x-3y^2}}$ e seja $\mathcal{C}$ a curva de nível de f que passa pelo ponto $(3,0)$.

a) Usando o sistema de coordenadas abaixo:

i) (0,5) represente geometricamente o domínio de f;

$3+2x-3y^2 > 0 \ \Rightarrow \ x > \frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{2} \ \Rightarrow \ D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > \frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{2}\}$

Ou seja, o domínio de f é a região interna da parábola $x = \frac{3}{2}y^2 - \frac{3}{2}$

ii) (1,0) faça um esboço da curva $\mathcal{C}$.

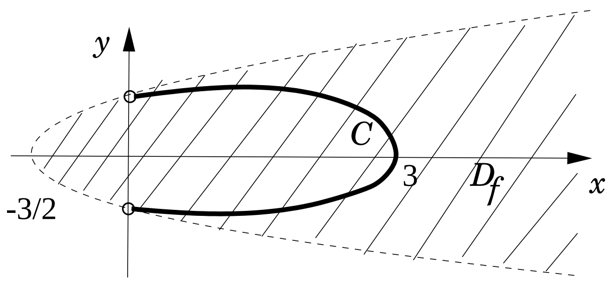
Seja $k \in Im_f$ e considere $\dfrac{x}{\sqrt{3+2x-3y^2}} = k$.

Como $(3,0) \in \mathcal{C}$, então $k = f(3,0) = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1$.

$x = \sqrt{3+2x-3y^2}$ (observe que $x > 0$)

$x^2 = 3+2x-3y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x + 1 + 3y^3 = 4 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)^2 = 1$

Ou seja, a curva $\mathcal{C}$ é parte da elipse $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)^2 = 1$, na qual $x > 0$. $(*)$



b) (1,0) Determine uma parametrização para a curva $\mathcal{C}$, isto é, encontre um intervalo I e uma função $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ contínua cuja imagem é $\mathcal{C}$.

Utilizando a relação fundamental da trigonometria em $(*)$, segue que uma parametrização para a curva $\mathcal{C}$ é dada por

$$\gamma(t) = (1 + 2\cos t, \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} t), \text{ com } 1 + 2\cos t > 0$$

Portanto, $\cos t > -\frac{1}{2}$, ou seja, $t \in I =]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[$.

c) (0,5) Decida se existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$.

Considere a curva $\gamma_1(t) = (t,1)$, com $t > 0$, e a curva γ como no item (b).

Temos que

(a) $\lim\limits_{t\to 0^+} f(\gamma_1(t)) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{3+2t-3}} = 0$

(b) $\lim\limits_{t\to \frac{2\pi}{3}} f(\gamma(t)) = \lim\limits_{t\to \frac{2\pi}{3}} 1 = 1$ (γ é a curva de nível 1 de f e $\gamma(t) \to (0,1)$, quando $t \to \frac{2\pi}{3}$)

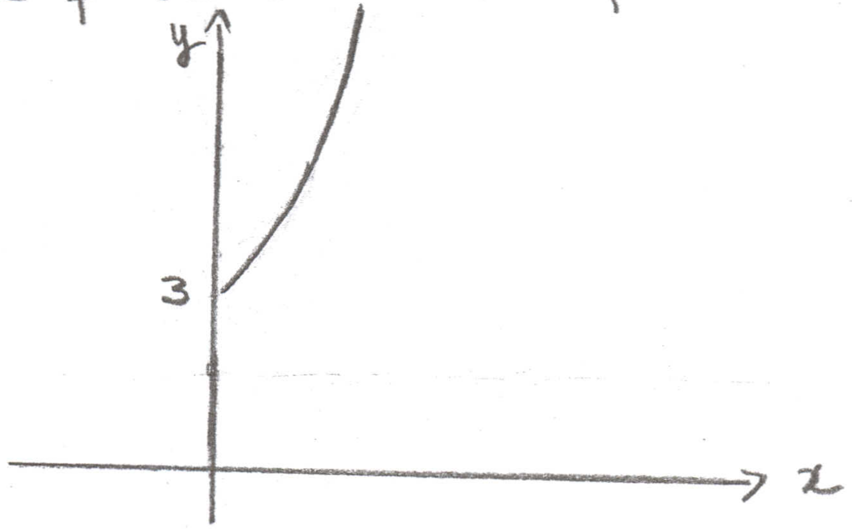
Portanto, NÃO existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$.

Questão 3. Esboce a imagem das seguintes curvas planas. Justifique.

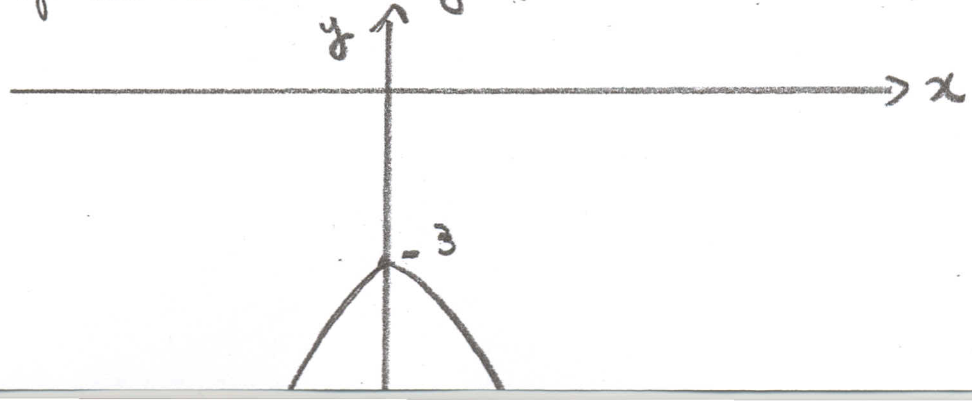
a) (1,0) $\gamma(t) = (\ln(t^2+1), t^2+3),\ t \in \mathbb{R}$

b) (1,0) $\gamma(t) = (\operatorname{tg} t, 3\sec t),\ t \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

a) $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ para $x(t) = \ln(t^2+1)$ e $y(t) = t^2+3$
Como $y(t) = e^{x(t)} + 2$, a imagem de γ está contida no gráfico de $f(x) = e^x + 2$. Como o domínio de γ é $\mathbb{R}$, $x(t) = \ln(t^2+1)$ percorre o intervalo $[\ln(1), +\infty[$, que é $[0,+\infty[$. Assim, a imagem de γ é a parte do gráfico de $f(x) = e^x+2$ na qual $x \geq 0$



b) $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ para $x(t) = \operatorname{tg} t$ e $y(t) = 3\sec t$
Como $\left(\frac{y(t)}{3}\right)^2 = 1 + (x(t))^2$, a imagem de γ está contida na hipérbole de equação $\frac{y^2}{9} - x^2 = 1$. Como $t \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, $x(t) = \operatorname{tg} t$ percorre $\mathbb{R}$ e $y(t) = 3\sec t \in]-\infty, -3]$



Questão 4. Calcule, caso exista. Se não existir, explique por quê.

a) (1,5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}(3x^2+4y^2)\ln(x^2+y^2)$ b) (1,0) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^3}{x^4-y^6}$

a) 1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(3x^2+4y^2)}{3x^2+4y^2} = 1$ pois $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$

e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (3x^2+4y^2) = 0$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = 0$ pois

$$\lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\overset{\to -\infty}{\ln t}}{\underset{\to +\infty}{1/t}} \overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t\to 0^+}(-t) = 0$$

e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = 0$

3) $0 \leq \dfrac{3x^2+4y^2}{x^2+y^2} \leq \dfrac{4(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 4$ se $(x,y)\neq(0,0)$

De 2) e 3) segue que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\dfrac{3x^2+4y^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitada}} \underbrace{(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)}_{\downarrow\, 0} = 0$

Logo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(3x^2+4y^2)}{3x^2+4y^2}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{3x^2+4y^2}{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)}_{\downarrow\, 0} = 0,$$

Portanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}(3x^2+4y^2)\ln(x^2+y^2) = 0$$

A

4b) Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2 y^3}{x^4 - y^6}$

Sejam $\gamma_1(t) = (t,0)$, $t \neq 0$

e $\gamma_2(t) = (t^6, 2t^4)$, $t \neq 0$

Temos que $\gamma_1(t) \xrightarrow[t\to 0]{} (0,0)$ e $\gamma_2(t) \xrightarrow[t\to 0]{} (0,0)$

Mas $\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_1(t)) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{0}{t^4} = 0 = L_1$

e $\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma_2(t)) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(t^6)^2 (2t^4)^3}{(t^6)^4 - (2t^4)^6} =$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2^3\, t^{24}}{(1-2^6)\, t^{24}} = \dfrac{2^3}{1-2^6} = L_2$

Como $L_1 \neq L_2$, não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

-A- e -B-

Questão 1.

a) (1,5) Seja $p(x)$ o polinômio de Taylor de ordem 4 da função $f(x) = \sqrt{x}$ em torno do ponto $x_0 = 1$. Determine $p(x)$ e mostre que:

$$|f(x) - p(x)| < \frac{7}{2^8}(x-1)^5, \text{ para todo } x > 1.$$

b) (0,5) Use o item (a), com $x = 1 + t^4$, para encontrar um valor aproximado de $\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1+t^4}\, dt$.

c) (0,5) Verifique que o erro na estimativa feita em (b) é inferior a $\frac{1}{2^{30}}$.

$f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1 \Rightarrow f(x_0) = 1$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{2}$

$f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2} \Rightarrow f''(x_0) = -\frac{1}{4}$

$f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-5/2} \Rightarrow f'''(x_0) = \frac{3}{8}$

$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16} x^{-7/2} \Rightarrow f^{(4)}(x_0) = -\frac{15}{16}$

$f^{(5)}(x) = \frac{15}{16} \cdot \frac{7}{2} x^{-9/2} = \frac{15 \cdot 7}{2^5} x^{-\frac{9}{2}}$

Portanto:

$$\text{(a)} \boxed{p(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{3}{8}\frac{(x-1)^3}{3!} - \frac{15}{16}\frac{(x-1)^4}{4!}}$$

Sabemos que $f(x) - p(x) = f^{(5)}(\bar{x}) \frac{(x-1)^5}{5!}$, para algum $\bar{x}$ entre 1 e x.

Se $x > 1$, então $1 < \bar{x} < x$

$\Rightarrow 1 < \sqrt{\bar{x}} < \sqrt{x}$

$\Rightarrow 1 < (\sqrt{\bar{x}})^9 < (\sqrt{x})^9$

$\Rightarrow (0<) \frac{1}{(\sqrt{\bar{x}})^9} < 1$

Logo,

$$|f(x) - p(x)| = \frac{15 \cdot 7}{2^5} (\bar{x})^{-9/2} \frac{(x-1)^5}{5!} < \frac{\cancel{15} \cdot 7}{2^5} \cdot \frac{(x-1)^5}{\cancel{5} \cdot 4 \cdot \cancel{3} \cdot 2}$$

$$\Rightarrow \boxed{|f(x) - p(x)| < \frac{7}{2^8}(x-1)^5, \text{ se } x > 1.}$$

Questão 1 – continuação

Fazendo $x = 1 + t^4$ $(\Rightarrow x - 1 = t^4)$ temos:

$$|f(1+t^4) - p(1+t^4)| < \frac{7}{2^8}(t^4)^5 = \frac{7}{2^8} t^{20}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{2^8} t^{20} < \sqrt{1+t^4} - p(1+t^4) < \frac{7}{2^8} t^{20}.$$

Calculando-se a integral, iremos obter:

$$\underbrace{-\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{7}{2^8} t^{20} dt}_{(*)} \leq \int_0^{1/2} \sqrt{1+t^4}\, dt - \int_0^{\frac{1}{2}} p(1+t^4)\, dt \leq \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{7}{2^8} t^{20} dt}_{(*)},$$

$$(*) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{7}{2^8} t^{20} dt = \frac{\cancel{7}}{2^8} \frac{t^{21}}{\cancel{21}} \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{21} < \frac{1}{2^{30}}$$

Portanto,

$$-\frac{1}{2^{30}} < \int_0^{1/2} \sqrt{1+t^4}\, dt - \int_0^{1/2} p(1+t^4)\, dt < \frac{1}{2^{30}},$$

ou seja, $$\boxed{\left| \int_0^{1/2} \sqrt{1+t^4}\, dt - \int_0^{1/2} p(1+t^4)\, dt \right| < \frac{1}{2^{30}}} \quad (c)$$

e um valor aproximado para $\int_0^{1/2} \sqrt{1+t^4}\, dt$ é

$$\int_0^{\frac{1}{2}} p(1+t^4)\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{2} t^4 - \frac{1}{4} \frac{(t^4)^2}{2} + \frac{3}{8} \frac{(t^4)^3}{3!} - \frac{15}{16} \frac{(t^4)^4}{4!} \right] dt =$$

$$= \int_0^{1/2} \left[1 + \frac{t^4}{2} - \frac{1}{8} t^8 + \frac{\cancel{3}}{8} \cdot \frac{1}{\cancel{3!}} t^{12} - \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4!} t^{16} \right] dt =$$

$$= \left[t + \frac{t^5}{10} - \frac{t^9}{9 \cdot 8} + \frac{1}{16} \frac{t^{13}}{13} - \frac{15}{16} \cdot \frac{1}{4!} \frac{t^{17}}{17} \right]_0^{1/2} =$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{1}{72} \cdot \frac{1}{2^9} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2^{13}} - \frac{15}{2^4} \cdot \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{2^{17}}}$$

(b)

Questão 2. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{12+4x-12y^2}}$ e seja $\mathcal{C}$ a curva de nível de f que passa pelo ponto $(6,0)$.

a) Usando o sistema de coordenadas abaixo:

i) (0,5) represente geometricamente o domínio de f;

$12+4x-12y^2>0 \ \Rightarrow\ x>3y^2-3 \ \Rightarrow\ D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>3y^2-3\}$

Ou seja, o domínio de f é a região interna da parábola $x = 3y^2-3$

ii) (1,0) faça um esboço da curva $\mathcal{C}$.

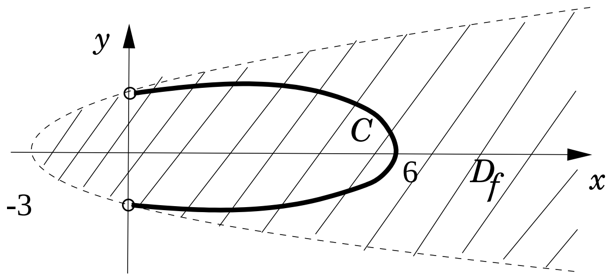
Seja $k \in Im_f$ e considere $\dfrac{x}{\sqrt{12+4x-12y^2}} = k$.

Como $(6,0)\in\mathcal{C}$, então $k = f(6,0) = \frac{6}{\sqrt{36}} = 1$.

$x = \sqrt{12+4x-12y^2}$ (observe que $x>0$)

$x^2 = 12+4x-12y^2 \quad\Rightarrow\quad x^2-4x+4+12y^3 = 16 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{x-2}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)^2 = 1$

Ou seja, a curva $\mathcal{C}$ é parte da elipse $\left(\frac{x-2}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\right)^2 = 1$, na qual $x>0$. $(*)$



b) (1,0) Determine uma parametrização para a curva $\mathcal{C}$, isto é, encontre um intervalo I e uma função $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ contínua cuja imagem é $\mathcal{C}$.

Utilizando a relação fundamental da trigonometria em $(*)$, segue que uma parametrização para a curva $\mathcal{C}$ é dada por

$$\gamma(t) = (2+4\cos t, \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{sen\,t}),\ \mathrm{com}\ 2+4\cos \mathrm{t} > 0$$

Portanto, $\cos t > -\frac{1}{2}$, ou seja, $t \in I =]-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}[$.

c) (0,5) Decida se existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$.

Considere a curva $\gamma_1(t) = (t,1)$, com $t > 0$, e a curva γ como no item (b).

Temos que

(a) $\lim\limits_{t\to 0^+} f(\gamma_1(t)) = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{t}{\sqrt{12+4t-12}} = 0$

(b) $\lim\limits_{t\to \frac{2\pi}{3}} f(\gamma(t)) = \lim\limits_{t\to \frac{2\pi}{3}} 1 = 1$ (γ é a curva de nível 1 de f e $\gamma(t) \to (0,1)$, quando $t \to \frac{2\pi}{3}$)

Portanto, NÃO existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y)$.

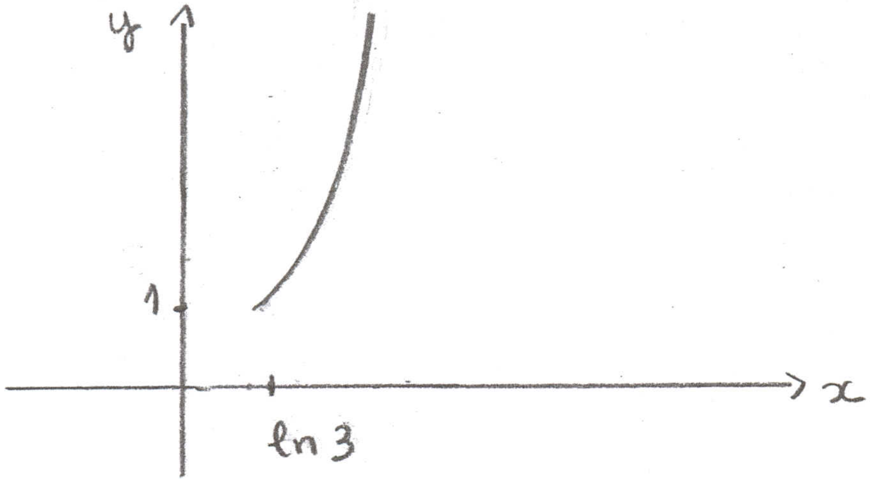
Questão 3. Esboce a imagem das seguintes curvas planas. Justifique.

a) (1,0) $\gamma(t) = (\ln(t^2+3), t^2+1), t \in \mathbb{R}$

b) (1,0) $\gamma(t) = (3\sec\, t\,,\, \mathrm{tg} t)\,,\, t \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$

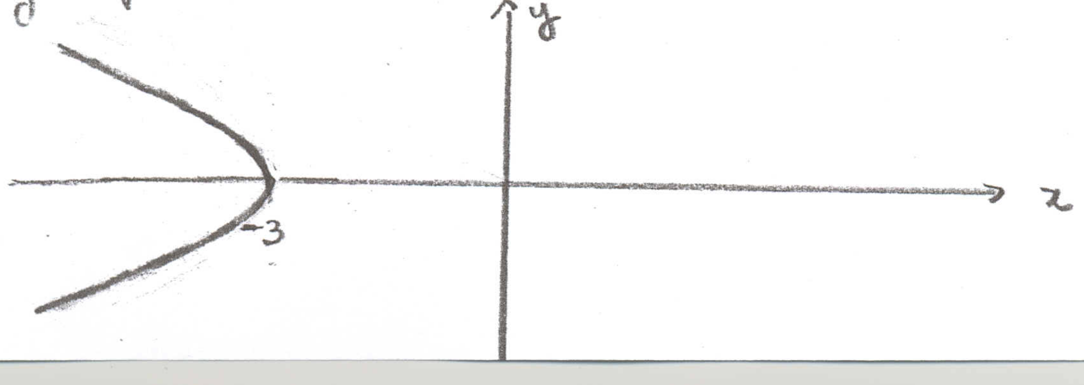
a) $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ para $x(t) = \ln(t^2+3)$ e $y(t) = t^2+1$

Como $y(t) = e^{x(t)} - 2$, a imagem de γ está contida no gráfico de $f(x) = e^{x} - 2$. Como o domínio de γ é $\mathbb{R}$, $x(t) = \ln(t^2+3)$ percorre o intervalo $[\ln(3), +\infty[$. Assim, a imagem de γ é a parte do gráfico de $f(x) = e^{x} - 2$ na qual $x \geq \ln 3$



$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ para $x(t) = 3\sec t$ e $y(t) = \mathrm{tg}\, t$

Como $\left(\frac{x(t)}{3}\right)^2 = 1 + (y(t))^2$, a imagem de γ está contida na hipérbole de equação $\frac{x^2}{9} - y^2 = 1$. Como $t \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, $y(t) = \mathrm{tg}\, t$ percorre $\mathbb{R}$ e $x(t) = 3\sec t \in]-\infty, -3]$



B

Questão 4. Calcule, caso exista. Se não existir, explique por quê.

a) (1,5) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \text{sen}\,(4x^2+3y^2)\ln(x^2+y^2)$

b) (1,0) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^6-y^4}$

a) 1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\text{sen}(4x^2+3y^2)}{4x^2+3y^2} = 1$ pois $\lim_{t\to 0} \frac{\text{sen}\, t}{t} = 1$

e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (4x^2+3y^2) = 0$

2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = 0$ pois

$\lim_{t\to 0^+} t\ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\overbrace{\ln t}^{\to -\infty}}{\underbrace{1/t}_{\to +\infty}} \overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t\to 0^+}(-t) = 0$

3) $0 \le \frac{4x^2+3y^2}{x^2+y^2} \le \frac{4\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}}$ se $(x,y)\neq(0,0)$

De 2) e 3) segue que $0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{4x^2+3y^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitada}} \underbrace{(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)}_{\downarrow\, 0}$

Logo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\text{sen}\,(4x^2+3y^2)}{4x^2+3y^2}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\left(\frac{4x^2+3y^2}{x^2+y^2}\right)(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)}_{\downarrow\, 0} = 0.$

Portanto

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \text{sen}\,(4x^2+3y^2)\ln(x^2+y^2) = 0$