Gabarito da Primeira Prova
MAT-2454 - Tipo A

29 de Agosto de 2011

Questão 1. Seja $f(x,y) = \dfrac{2x^2+y^2}{4x-y^2}$

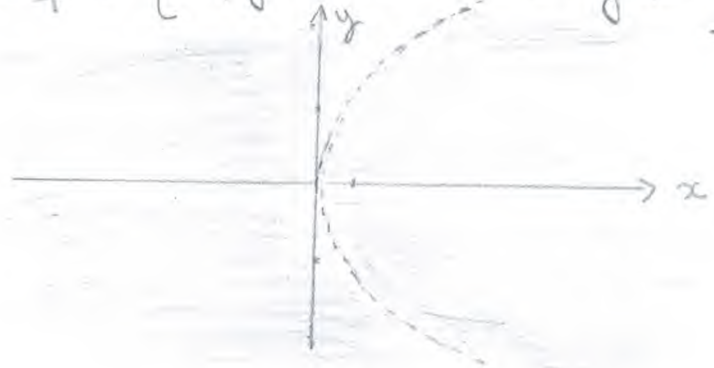
a) (0,5 ponto) Encontre e esboce o domínio de f.

b) (1,0 ponto) Esboce a curva de nível de f que corresponde ao nível $z=3$. Em que pontos essa curva intercepta o eixo $0x$?

c) (1,0 ponto) Encontre uma parametrização γ para a curva do item b).
(γ deve ser uma função e você deve explicitar o domínio de γ.)

d) (1,0 ponto) Sabendo que a imagem da curva $\Gamma(t) = (t^2, t, z(t))$, $t>0$, está contida no gráfico de f, encontre a função $z(t)$ e dê a equação da reta tangente a Γ em $\Gamma(1)$.

a) Domínio de f : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - y^2 \neq 0\}$



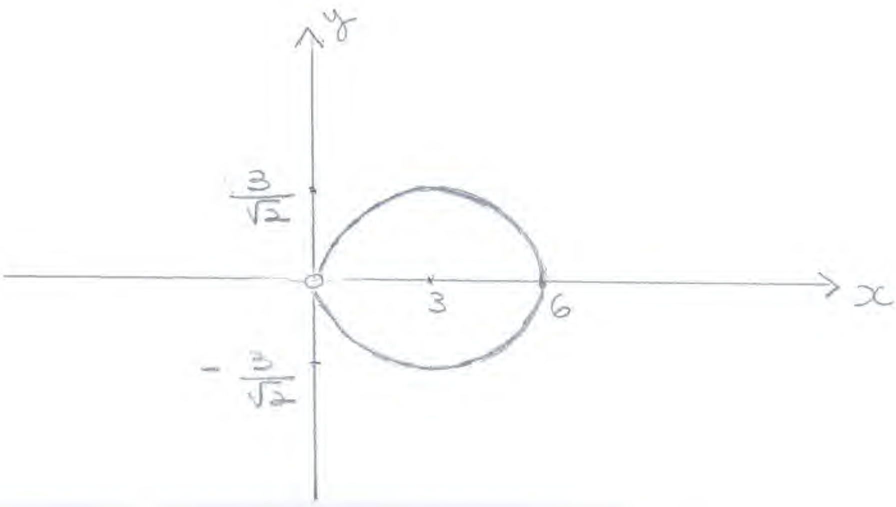
O domínio é formado por todos os pontos que NÃO estão na parábola $y^2 = 4x$

b) $$\frac{2x^2+y^2}{4x-y^2} = 3 \iff \begin{cases} 2x^2+y^2 = 3(4x-y^2) \\ 4x-y^2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2+y^2 = 3(4x-y^2) \\ 2x^2+y^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2-6x+2y^2=0 \\ (x,y)\neq(0,0) \end{cases} \iff \begin{cases} (x-3)^2+2y^2 = 9 \\ (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$$

A curva de nível correspondente a $z=3$ é formada por todos os pontos $(x,y)\neq(0,0)$ que estão na elipse de equação $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{2}{9}y^2 = 1$

Interseção com o eixo $0x$: $(x,0)$ é da curva quando $(x-3)^2 = 9$, mas $x \neq 0$, isto é, quando $x=6$



$-3 = 3\cos t$ $\quad t \in]-\pi, \pi[$

$- \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t$ $\quad t \in]-\pi, \pi[$

$y = \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t$

$\gamma :]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = \left(3 + 3\cos t, \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} t\right)$

1) $z(t) = f(t^2, t) = \frac{2t^4 + t^2}{4t^2 - t^2} = \frac{2t^4 + t^2}{3t^2} = \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{3}$

$\Gamma(t) = \left(t^2, t, \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{3}\right)$ $\quad \Gamma(1) = (1, 1, 1)$

$\Gamma'(t) = \left(2t, 1, \frac{4}{3}t\right)$ $\quad \Gamma'(1) = \left(2, 1, \frac{4}{3}\right)$

Equação da reta:

$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda\left(2, 1, \frac{4}{3}\right)$

Questão 2. Seja $f(x, y) = \sqrt{y - 2x^2 - 1}$.

a) (1,0 ponto) Esboce uma família de curvas de nível de f.

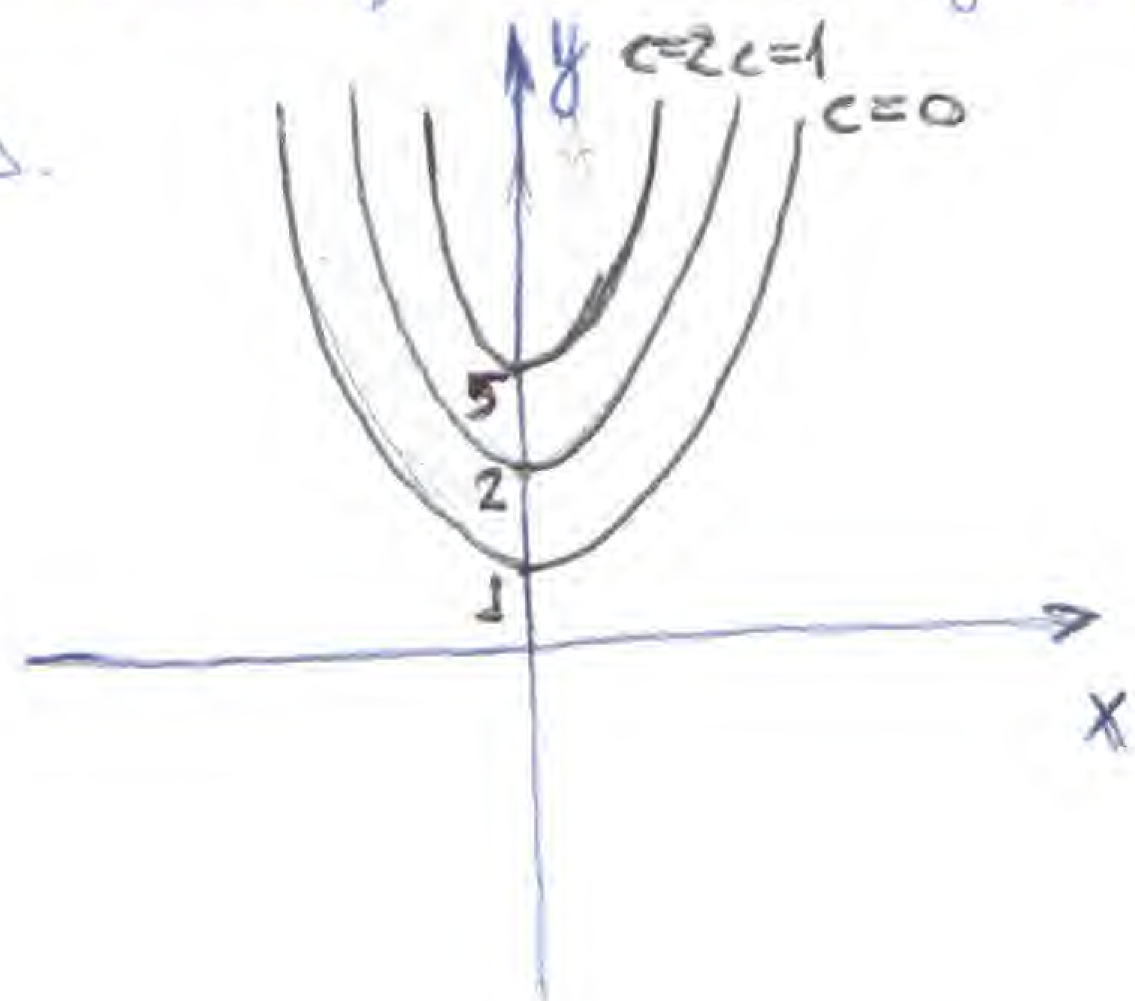
b) (1,0 ponto) Encontre a interseção do gráfico de f com o plano $x = 0$ e descreva a interseção do gráfico de f com cada plano $y = k$, em que $k \in \mathbb{R}$.

c) (0,5 ponto) Descreva e esboce o gráfico de f.

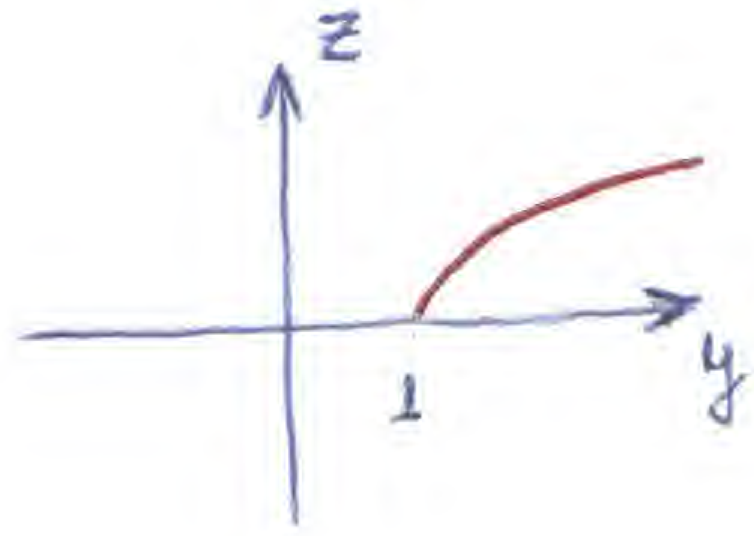
d) (1,0 ponto) Encontre uma parametrização para a interseção do gráfico de f com o plano $z = x$ (explicite o domínio).

(a) O domínio da função é o conjunto $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2x^2+1\}$

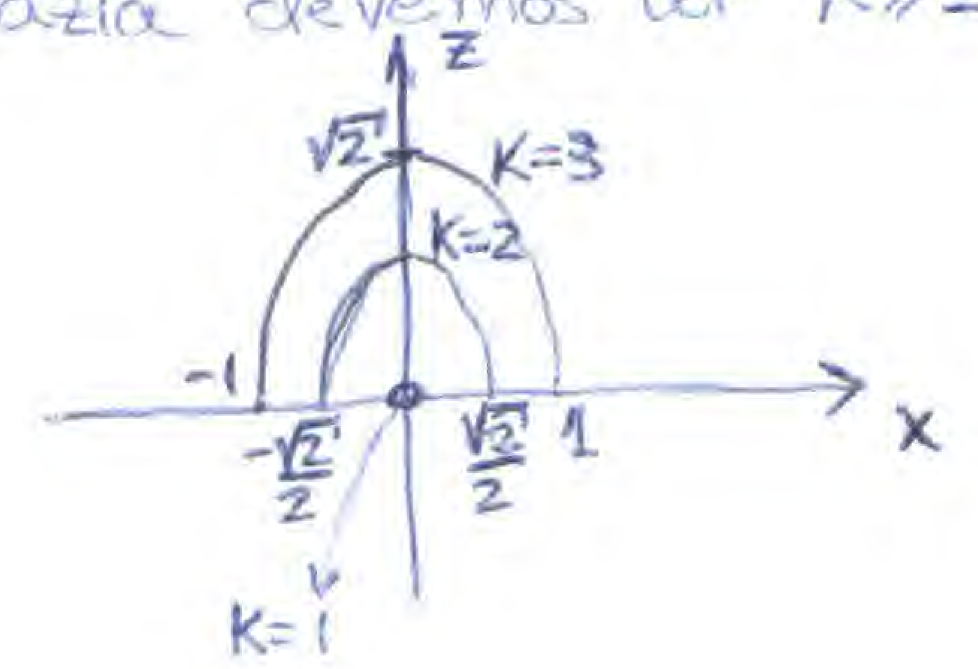
As curvas de nível de f são da forma $f(x,y) = c$, ou seja, $y - 2x^2 - 1 = c^2$, ou ainda $y = 2x^2 + c^2 + 1$. Como $f(x,y) \geq 0$, as curvas de nível negativo dela são vazias.



(b) $\begin{cases} x = 0 \\ z = f(x,y) \end{cases} \Rightarrow z = f(0,y) \Rightarrow z^2 = y - 1,\ z \geq 0 \Rightarrow$



$\begin{cases} y = k \\ z = f(x,y) \end{cases} \Rightarrow z = f(x,k) = \sqrt{k - 2x^2 - 1} \Rightarrow z^2 + 2x^2 = k - 1$, $z \geq 0$. Para a interseção procurada ser não vazia devemos ter $k \geq 1$ e com isso $-\sqrt{\frac{k-1}{2}} \leq x \leq \sqrt{\frac{k-1}{2}}$. Tais curvas são partes de elipses.



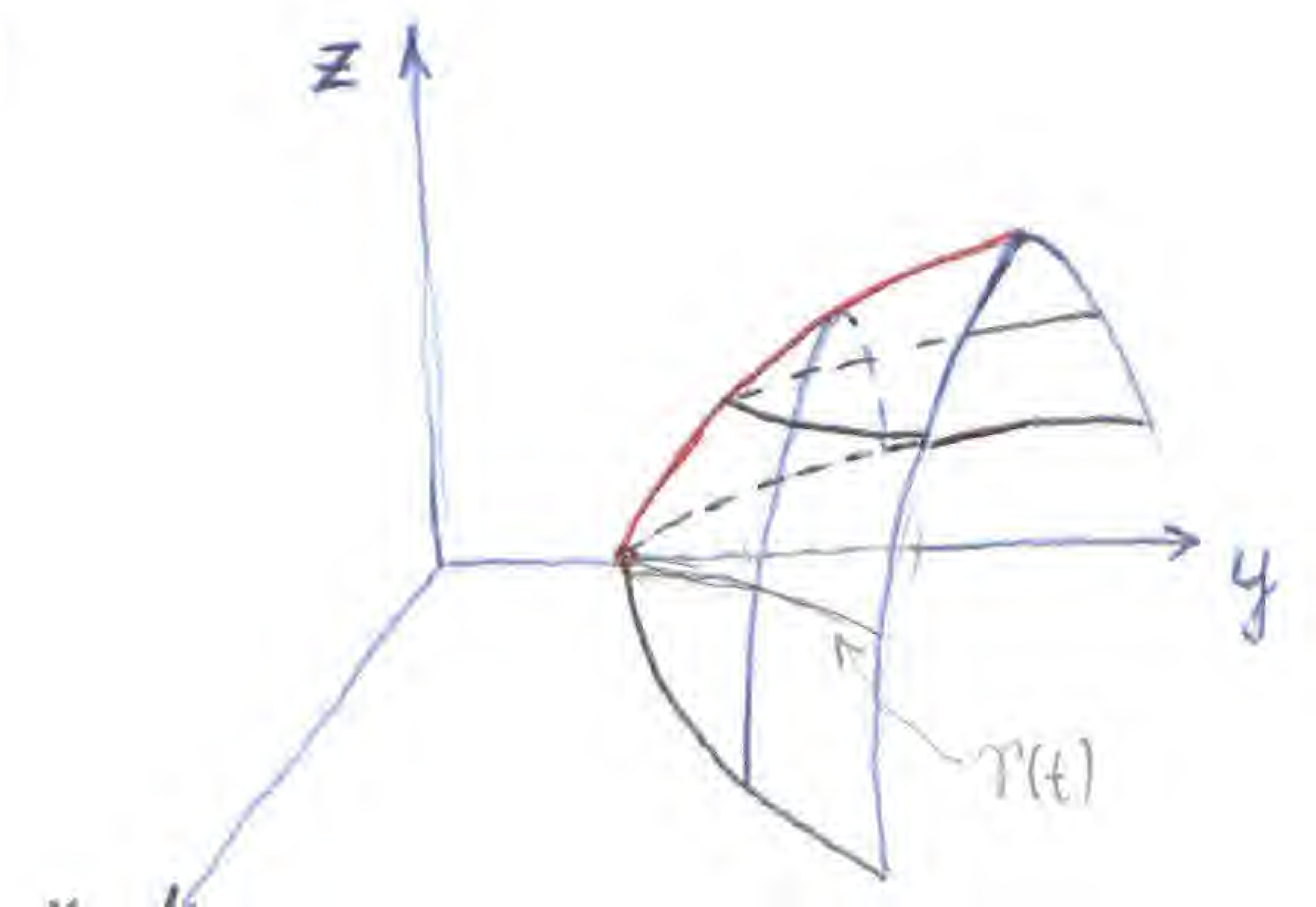
(d) $\begin{cases} z = x \\ z = f(x,y) \end{cases} \Rightarrow x = \sqrt{y - 2x^2 - 1},\ x \geq 0$

$\Rightarrow y = 3x^2 + 1$

Fazendo $x(t) = t$, temos $z(t) = t$ e $y(t) = 3t^2 + 1$. Logo, uma parametrização é

$\gamma(t) = (t, 3t^2+1, t),\ t \geq 0.$

(c)



Questão 3.

a) (1,0 ponto) Esboce a imagem de $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos^2 t + 2)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) (1,0 ponto) Decida se existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^4 + x^5\sqrt[3]{y^4}}{x^6+y^8}$. Justifique.

c) (1,0 ponto) Considere

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^4+y^2}\operatorname{sen}\left(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ L, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Existe algum número real L para o qual f seja contínua em $(0,0)$? Justifique.

a) $x(t) = \operatorname{sen} t$, $y(t) = \cos^2 t + 2$ satisfazem $x^2 + y - 2 = 1$; logo, a imagem de γ está contida na parábola $y = 3 - x^2$.
Além disso, $-1 \le x(t) \le 1$ e $2 \le y(t) \le 3$

b) Seja $f(x,y) = \dfrac{x^3y^4 + x^5\sqrt[3]{y^4}}{x^6+y^8}$ e considere $\gamma_1(t) = (t,0)$; $\gamma_2(t) = (t^4, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.

Temos γ_1 e γ_2 contínuas, $\gamma_1(0) = (0,0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1(t), \gamma_2(t) \in D_f$, $\forall t \neq 0$,

$\gamma_1(t) \neq (0,0) \neq \gamma_2(t)$, $\forall t \neq 0$,

$$\lim_{t\to0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to0} f(t,0) = \lim_{t\to0} 0 = 0$$

$$\lim_{t\to0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to0} f(t^4,t^3) = \lim_{t\to0} \frac{2t^{24}}{2t^{24}} = \lim_{t\to0} 1 = 1.$$

Como $\displaystyle\lim_{t\to0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t\to0} f(\gamma_2(t))$, não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

c) Temos $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{sen}\left(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right) \underset{\substack{u = x^2+y^2 \\ (x,y)\to(0,0) \Rightarrow u \to 0}}{=} \lim_{u\to0} \operatorname{sen}(e^{-u}) = 0$

e $0 \le x^4 \le x^4 + y^2 \underset{(x,y)\neq(0,0)}{\Longrightarrow} 0 \le \dfrac{x^4}{x^4+y^2} \le 1 \Rightarrow \left|\dfrac{x^4}{x^4+y^2}\right| \le 1$

logo, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^4}{x^4+y^2}}_{\text{limit}} \underbrace{\operatorname{sen}\left(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right)}_{\to 0} = 0$

f será contínua se $L = 0$.

Gabarito da Primeira Prova
MAT-2454 - Tipo B

29 de Agosto de 2011

Questão 1. Seja $f(x,y) = \dfrac{x^2+2y^2}{4y-x^2}$

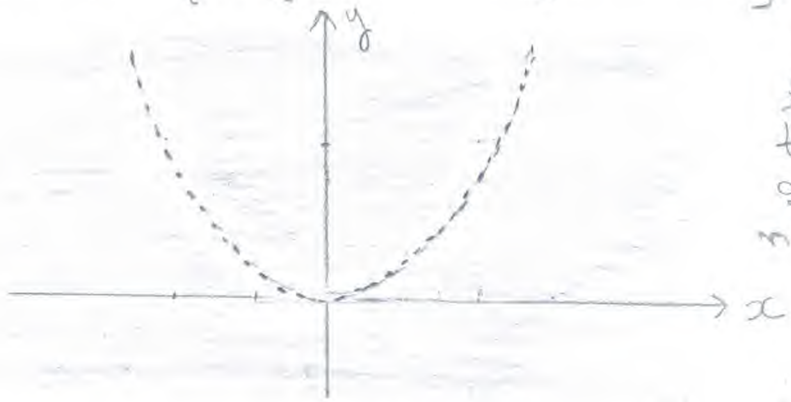
a) (0,5 ponto) Encontre e esboce o domínio de f.

b) (1,0 ponto) Esboce a curva de nível de f que corresponde ao nível $z=3$. Em que pontos essa curva intercepta o eixo $0y$?

c) (1,0 ponto) Encontre uma parametrização γ para a curva do item b). (γ deve ser uma função e você deve explicitar o domínio de γ.)

d) (1,0 ponto) Sabendo que a imagem da curva $\Gamma(t) = (t, t^2, z(t))$, $t>0$, está contida no gráfico de f, encontre a função $z(t)$ e dê a equação da reta tangente a Γ em $\Gamma(1)$.

a) Domínio de f: $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 4y - x^2 \neq 0\}$



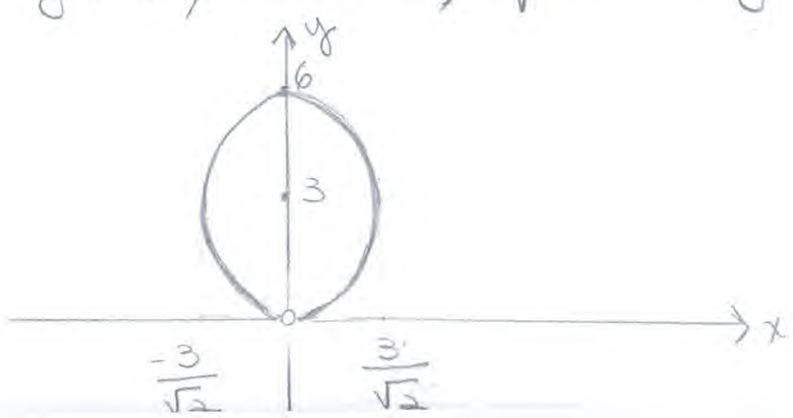
O domínio é formado por todos os pontos que NÃO estão na parábola $x^2 = 4y$

b) $\dfrac{x^2+2y^2}{4y-x^2} = 3 \iff \begin{cases} x^2+2y^2 = 3(4y-x^2) \\ 4y-x^2 \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+2y^2 = 3(4y-x^2) \\ x^2+2y^2 \neq 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2x^2+y^2-6y=0 \\ (x,y)\neq(0,0) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x^2+(y-3)^2 = 9 \\ (x,y)\neq(0,0) \end{cases}$

A curva de nível correspondente a $z=3$ é formada por todos os pontos $(x,y)\neq(0,0)$ que estão na elipse de equação $\frac{2}{9}x^2 + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

Interseção com o eixo Oy: $(0,y)$ é da curva quando $(y-3)^2 = 9$, mas $y \neq 0$, isto é, quando $y=6$



c) $x = \frac{3}{\sqrt{2}} \cos t$

$t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

$y - 3 = 3 \operatorname{sen} t$

$\gamma : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \cos t, \ 3 + 3 \operatorname{sen} t \right)$

d) $z(t) = f(t, t^2) = \frac{t^2 + 2t^4}{4t^2 - t^2} = \frac{t^2 + 2t^4}{3t^2} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} t^2$

$\Gamma(t) = \left(t, t^2, \frac{1}{3} + \frac{2}{3} t^2\right)$ $\quad$ $\Gamma(1) = (1, 1, 1)$

$\Gamma'(t) = \left(1, 2t, \frac{4}{3} t\right)$ $\quad$ $\Gamma'(1) = \left(1, 2, \frac{4}{3}\right)$

Equação da reta:

$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda \left(1, 2, \frac{4}{3}\right)$

Questão 2. Seja $f(x, y) = \sqrt{x - 2y^2 - 1}$.

a) (1,0 ponto) Esboce uma família de curvas de nível de f.

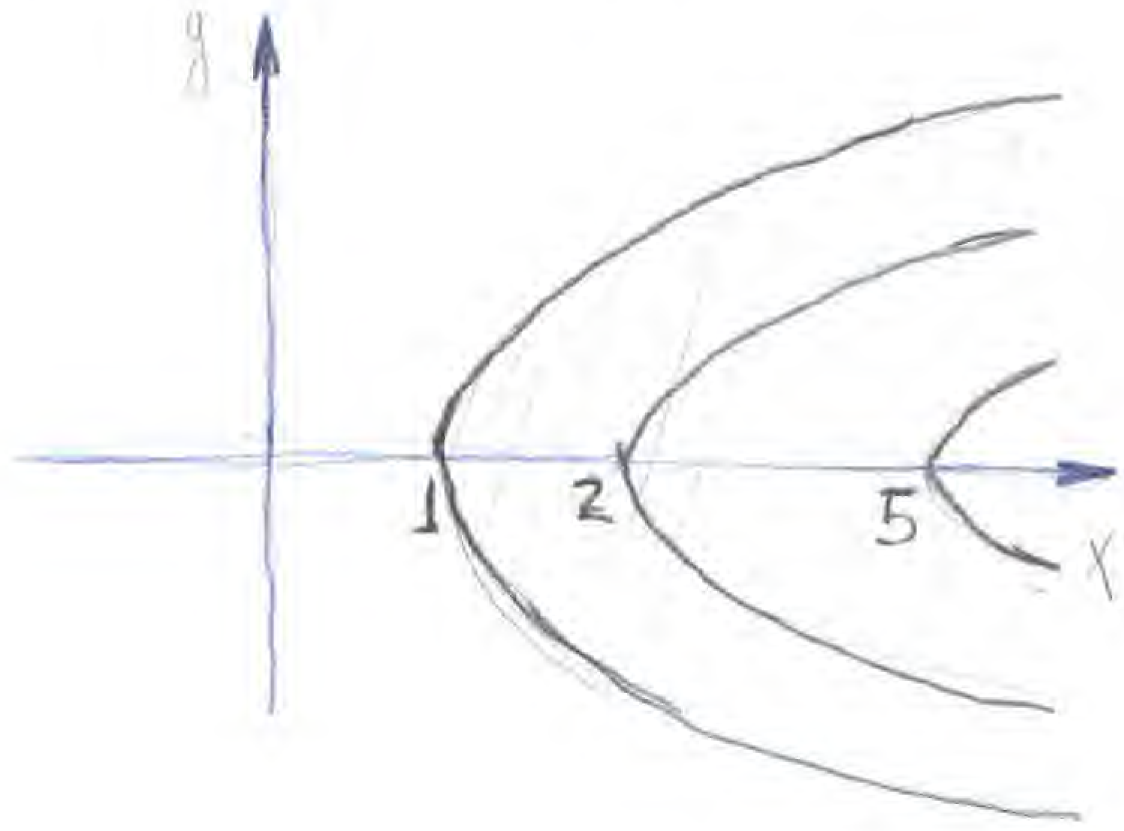
b) (1,0 ponto) Encontre a interseção do gráfico de f com o plano $y = 0$ e descreva a interseção do gráfico de f com cada plano $x = k$, em que $k \in \mathbb{R}$.

c) (0,5 ponto) Descreva e esboce o gráfico de f.

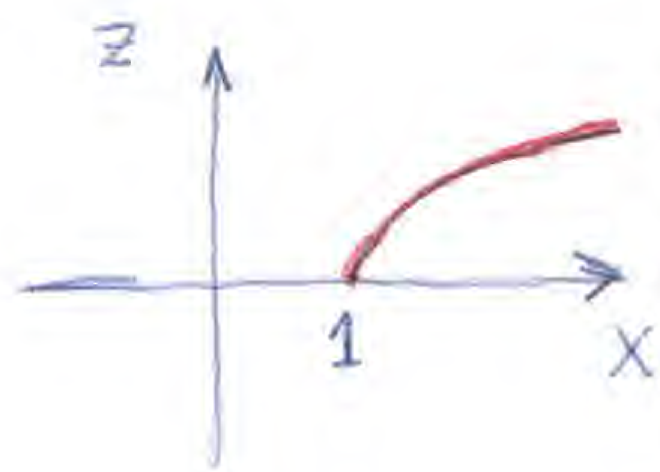
d) (1,0 ponto) Encontre uma parametrização para a interseção do gráfico de f com o plano $z = y$ (explicite o domínio).

(a) O domínio da função é o conjunto $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 2y^2 + 1\}$.

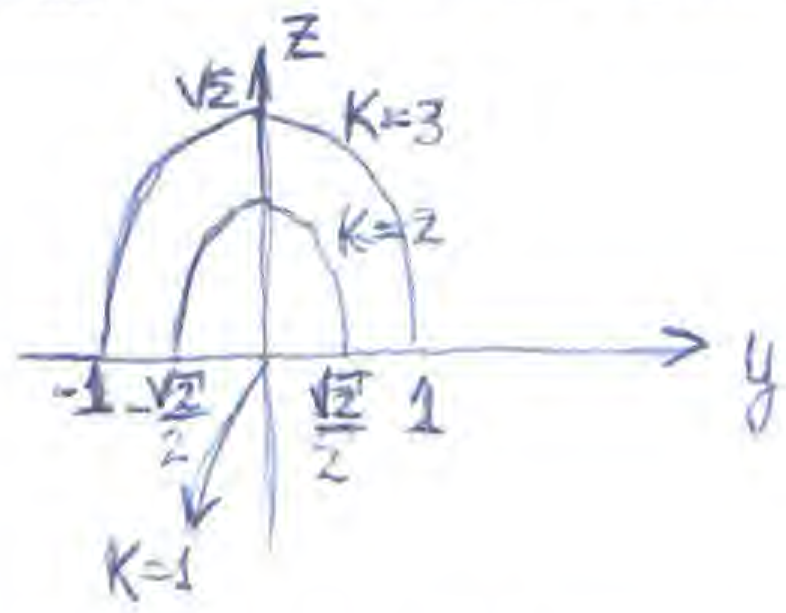
As curvas de nível de f são da forma $f(x,y) = c$, ou ainda, $x - 2y^2 - 1 = c^2$, isto é, $x = 2y^2 + c^2 + 1$. Como $f(x,y) \geqslant 0$, suas curvas de nível negativo são vazias.



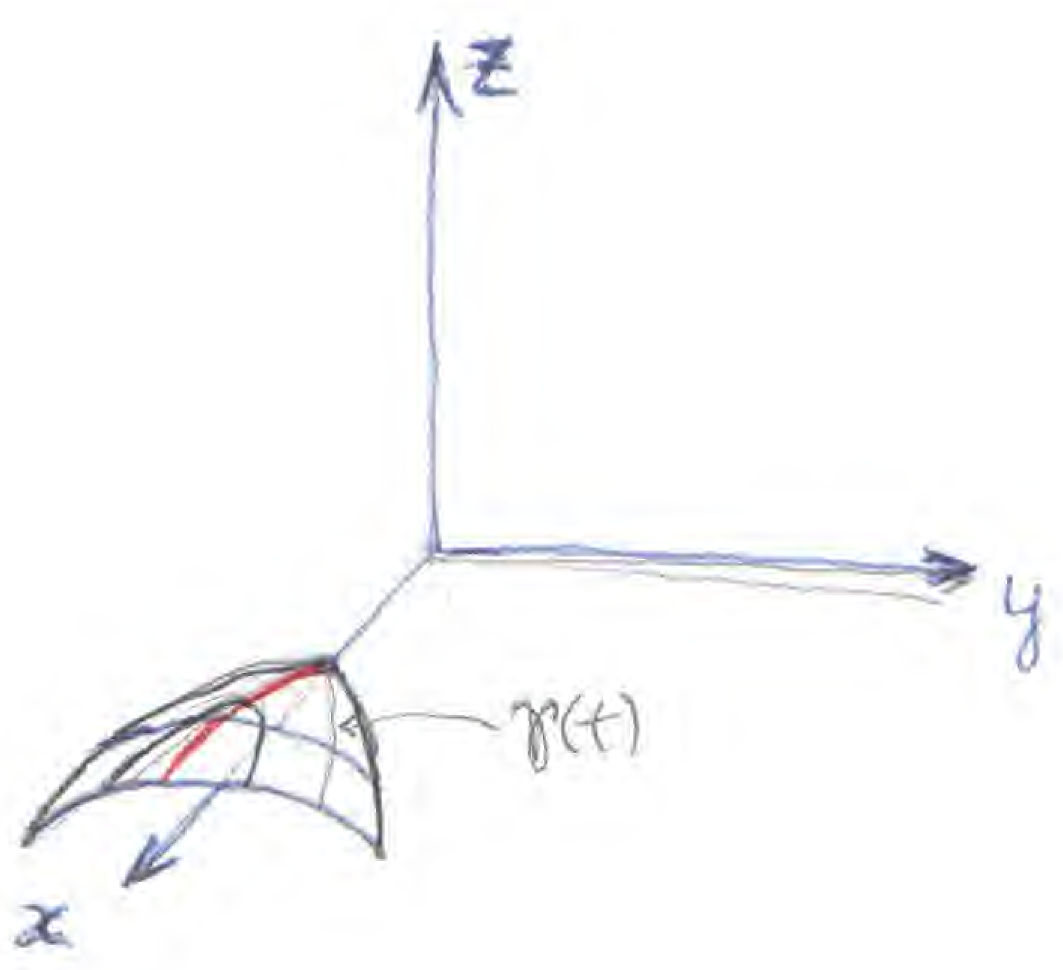
(b) $\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ z = f(x,y) \end{array}\right\} \Rightarrow z = f(x,0) \Rightarrow z^2 = x + 1,\ z \geqslant 0$



$\left.\begin{array}{l} x = k \\ z = f(x,y) \end{array}\right\} \Rightarrow z = f(k,y) = \sqrt{k - 2y^2 - 1} \Rightarrow z^2 + 2y^2 = k - 1,\ z \geqslant 0$. Para a interseção procurada ser não-vazia devemos ter $k \geqslant 1$ e com isso $-\sqrt{\frac{k-1}{2}} \leqslant y \leqslant \sqrt{\frac{k-1}{2}}$. Tais curvas são partes de elipses:



(c)



(d) $\left.\begin{array}{l} z = y \\ z = f(x,y) \end{array}\right\} \Rightarrow y = \sqrt{x - 2y^2 - 1},\ y \geqslant 0$

$\Rightarrow x = 3y^2 + 1$

Fazendo $y(t) = t$, temos $z(t) = t$ e $x(t) = 3t^2 + 1$, Logo, uma parametrização é

$\gamma(t) = (3t^2 + 1, t, t),\ t \geqslant 0.$

Questão 3.

a) (1,0 ponto) Esboce a imagem de $\gamma(t) = (\text{sen}^2 t + 2, \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$.

b) (1,0 ponto) Decida se existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^3 + y^5\sqrt[3]{x^4}}{x^8+y^6}$. Justifique.

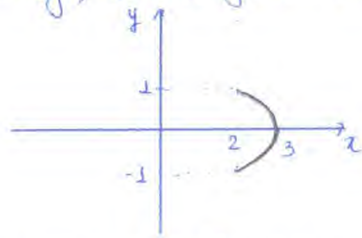
c) (1,0 ponto) Considere

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^4}\,\text{sen}\left(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right), & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ L, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Existe algum número real L para o qual f seja contínua em $(0,0)$? Justifique.

a) $x(t) = \text{sen}^2 t + 2$ e $y(t) = \cos t$ satisfazem $x - 2 + y^2 = 1$; logo, a imagem de γ está contida na parábola $x = 3 - y^2$.

Além disso, $2 \leq x(t) \leq 3$ e $-1 \leq y(t) \leq 1$.



b) Seja $f(x,y) = \dfrac{x^4y^3 + y^5\sqrt[3]{x^4}}{x^8+x^6}$ e considere $\gamma_1(t) = (t,0)$, $\gamma_2(t) = (t^3, t^4)$, $t \in \mathbb{R}$

Temos γ_1 e γ_2 contínuas, $\gamma_1(0) = (0,0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1(t), \gamma_2(t) \in D_f$, $\forall t \neq 0$

$\gamma_1(t) \neq (0,0) \neq \gamma_2(t)$, $\forall t \neq 0$

$$\lim_{t\to0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t\to0} f(t,0) = \lim_{t\to0} 0 = 0$$

$$\lim_{t\to0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t\to0} f(t^3,t^4) = \lim_{t\to0} \frac{2t^{24}}{2t^{24}} = \lim_{t\to0} 1 = 1$$

Como $\displaystyle\lim_{t\to0} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t\to0} f(\gamma_2(t))$, não existe $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

c) Temos $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \text{sen}\left(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right) = \lim_{u\to0} \text{sen}(e^{-u}) = 0$

$u = x^2+y^2$

$(x,y)\to(0,0) \Rightarrow u \to 0$

e $0 \leq y^4 \leq y^4 + x^2 \underset{(x,y)\neq(0,0)}{\Rightarrow} 0 \leq \dfrac{y^4}{x^2+y^4} \leq 1 \Rightarrow \left|\dfrac{y^4}{x^2+y^4}\right| \leq 1$

Logo, $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{y^4}{x^2+y^4}}_{\text{limt}}\, \text{sen}\left(e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}\right) = 0$

f será contínua se $L = 0$.