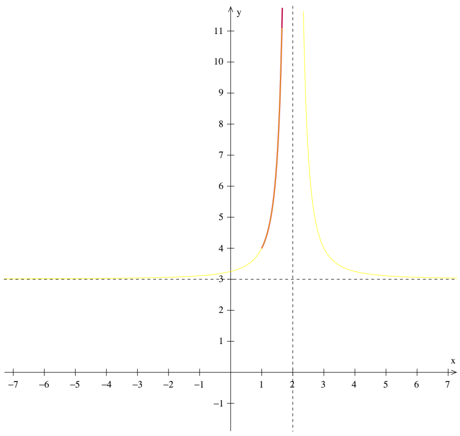
1. (a) **(1,5)** Sejam $\gamma(t) = (2 - \cos t, \sec^2 t + 3), t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ e $f(x,y) = ((x-2)^2(y-3))^{\frac{2}{3}} + 1$. Esboce a imagem de γ e mostre que a imagem de γ está contida em uma curva de nível de f indicando qual é o nível.

Resolução:

$f(\gamma(t)) = f(2 - \cos t, \sec^2 t + 3) = ((2 - \cos t - 2)^2(\sec^2 t + 3 - 3))^{\frac{2}{3}} + 1 =$ $((-\cos t)^2(\sec t)^2)^{\frac{2}{3}} + 1 = 2$, $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, portanto a imagem de γ está contida na curva de nível 2 de f.

$\gamma : \begin{cases} x = 2 - \cos(t) \\ y = \sec^2(t) + 3 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{(x-2)^2} + 3$, com $1 \leq x < 2$ e $y \geq 4$.



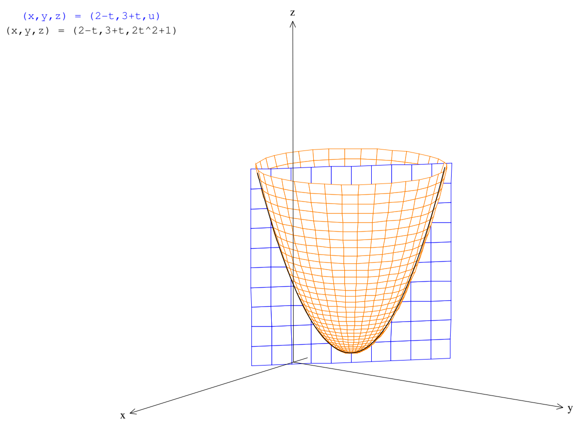
(b) **(1,0)** Sejam $g(x,y) = (x-2)^2 + (y-3)^2 + 1$ e $\Gamma(t) = (2-t, 3+t, z(t)), t \in \mathbb{R}$. Sabendo que a imagem de Γ está contida no gráfico de g, encontre $z(t)$. Esboce a imagem de Γ.

Resolução:

$z(t) = g(2-t, 3+t) = (2-t-2)^2 + (3+t-3)^2 + 1 = 2t^2 + 1$.

$\begin{cases} x = 2 - t \\ y = t + 3 \end{cases} \Rightarrow x + y = 5$. Portanto, $\Gamma(\mathbb{R})$ é a intersecção do gráfico de g (parabolóide) e o plano $x + y = 5$.

Uma parametrização de Γ é dada por $\Gamma(t) = (2-t, 3+t, 2t^2+1), t \in \mathbb{R}$.



A

2. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

(a) **(1,0)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4xy^3 + 2x^3 - y^7}{x^2 + 5y^6}$

(b) **(1,0)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3(1-\cos(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^3}$

a) Seja $f(x,y) = \dfrac{4xy^3 + 2x^3 - y^7}{x^2+5y^6}$. Temos: $f(t,0) = \dfrac{2t^3}{t^2} = 2t$ se $t \neq 0$

e $f(t^3,t) = \dfrac{4t^6 + 2t^9 - t^7}{6t^6} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t}{6}$, se $t \neq 0$. Quando $t \to 0$, temos que

$(t,0) \to (0,0)$ e $(t^3,t) \to (0,0)$, mas $\lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} 2t = 0$ e

$\lim_{t\to 0} f(t^3,t) = \lim_{t\to 0}\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t}{6}\right) = \dfrac{2}{3}$. Como esses dois limites são diferentes, concluímos que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x} \underbrace{\frac{x^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitada}}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \cdot \underbrace{\frac{(1-\cos(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^2}}_{\substack{\downarrow \\ 1/2}} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Justificativa: 1) a função $h(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$ é limitada (pois $0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leq \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \leq 1$) e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0$. Logo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot \dfrac{x^2}{x^2+y^2} = 0$

2) $$\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} \overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{2t} = \frac{1}{2}.$$

Como $x^2+y^2 \to 0$ quando $(x,y)\to(0,0)$, temos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = 0$$

A

Questão 3. (2,0) Seja $f(x,y) = \dfrac{3(x-1)^2 + (y-1)^2}{x^2 - y^2}$.

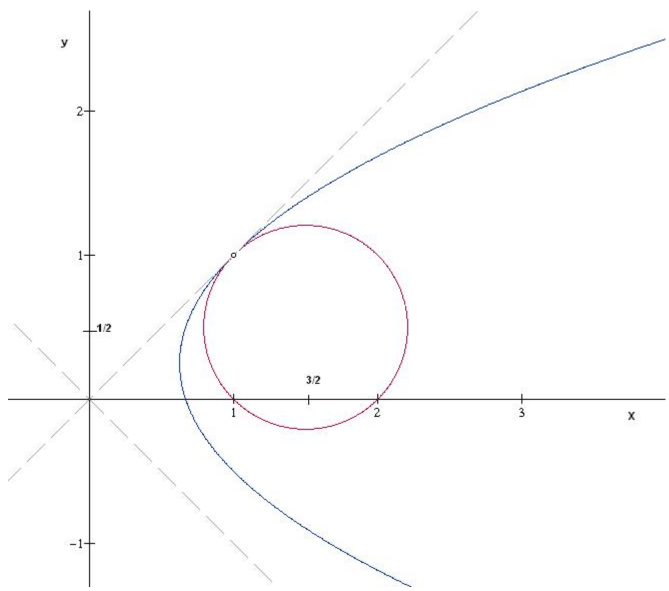
1. Esboce (no mesmo sistema de coordenadas) as curvas de nível de f nos níveis $k = 1$ e $k = 3$.

2. Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$? **Justifique.**

a) Domínio de $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \neq y^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \neq |y|\}$.

$$\begin{aligned} f(x,y) = k \quad &\Leftrightarrow \quad 3(x-1)^2 + (y-1)^2 = kx^2 - ky^2 \ \text{ e } \ |x| \neq |y| \\ &\Leftrightarrow \quad (3-k)x^2 - 6x + (1+k)y^2 - 2y + 4 = 0 \ \text{ e } \ |x| \neq |y|. \end{aligned}$$

<u>Se k=3:</u> $\quad -6x + 4y^2 - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}(2y^2 - y + 2)$ (Parábola).
<u>Se k=1:</u> $\quad 2x^2 - 6x + 2y^2 - 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{3}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$ (Círculo).



b) $\lim\limits_{t\to1} f(1,t) = \lim\limits_{t\to1} \dfrac{(t-1)^2}{1-t^2} = \lim\limits_{t\to1} \dfrac{1-t}{1+t} = 0.$

Por outro lado, a imagem da curva $\gamma(t) = (\frac{3}{2} + \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} + \frac{\sin t}{\sqrt{2}})$, $(t \in [0, 2\pi])$ está contida na curva de nível $k = 1$ para $t \neq \frac{3\pi}{4}$ e $\gamma(\frac{3\pi}{4}) = (1,1)$. Assim, $\lim\limits_{t\to\frac{3\pi}{4}} f(\gamma(t)) = 1$ e vemos que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$ não existe.

A

4. Sejam S_1 e S_2 as superfícies

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = (y-1)^2 - x^2\} \text{ e } S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = x^2 + 2y^2 - 2\}.$$

(a) **(1,0)** Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção de S_1 e S_2. Isto é, encontre um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma função $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ tal que a imagem de γ seja igual a $S_1 \cap S_2$.

(b) **(1,0)** Determine a equação da reta tangente a $S_1 \cap S_2$ no ponto $(\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, -\frac{1}{2})$.

(a) Seja $(x,y,z) \in S_1 \cap S_2$. Então

$z = (y-1)^2 - x^2$ e $z = x^2 + 2y^2 - 2$

Logo $(y-1)^2 - x^2 = x^2 + 2y^2 - 2$

$\Rightarrow y^2 - 2y + 1 - x^2 = x^2 + 2y^2 - 2$

$\Rightarrow 2x^2 + y^2 + 2y + 1 - 4 = 0$

Logo $(\sqrt{2}x)^2 + (y+1)^2 = 4 \Rightarrow \boxed{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 = 1.}$ (*)

Para cada (x,y) que satisfaz (*), existe $t \in [0, 2\pi[$ tal que $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \cos t$ e $\left(\frac{y+1}{2}\right) = \operatorname{sen} t$.

Reciprocamente, se $\frac{x}{\sqrt{2}} = \cos t$ e $\frac{y+1}{2} = \operatorname{sen} t$ então $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 = 1$ se e só se (x,y) satisfaz (*). Assim, existe $t \in [0, 2\pi[$ com $x = \sqrt{2}\cos t$ e $y = 2\operatorname{sen} t - 1$.

Como $z = x^2 + 2y^2 - 2$ temos que

$$\boxed{\begin{array}{l} \gamma : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t, 2\operatorname{sen} t - 1, 2\cos^2 t + 2(2\operatorname{sen} t - 1)^2 - 2) \end{array}}$$

é uma parametrização de $S_1 \cap S_2$.

(b) Encontrar $t_0 \in [0, 2\pi[$ tal que

$\gamma(t_0) = (\frac{\sqrt{6}}{2}, 0, -\frac{1}{2})$

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{2}\cos t_0 = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \cos t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2\operatorname{sen} t_0 - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} t_0 = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{6}$$

Observe que $z = 2 \cdot \frac{3}{4} - 2 = -\frac{1}{2}$.

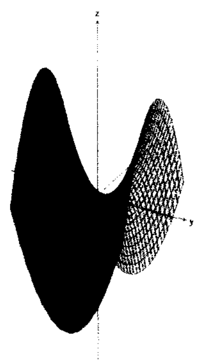
Agora, $\vec{\gamma}'(t) = (-\sqrt{2}\operatorname{sen} t, 2\cos t, -4\cos t \operatorname{sen} t + 4(2\operatorname{sen} t - 1)2\cos t)$

$\vec{\gamma}'(\pi/3) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}) \neq \vec{0}$

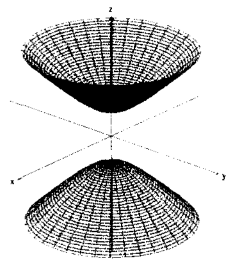
Assim uma equação da reta ~~tangente~~ é: $X = (\sqrt{6}/2, 0, -1/2) + \lambda(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

5. **(1,5)** Cada uma das figuras abaixo representa uma superfície. Na coluna 1 da tabela temos uma equação para cadá uma dessas superfícies. Cada superfície contém a imagem de uma das curvas da coluna 2. Escreva abaixo de cada figura qual é a curva cuja imagem está contida na superfície que ela representa.

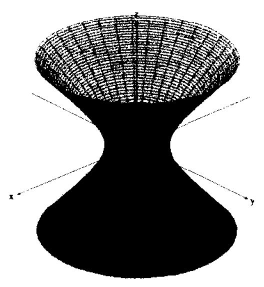
1	2
$z^2 = x^2 + y^2$	$\gamma(t) = (t, 2t, 3t^2), t \in \mathbb{R}$
$z = y^2 - x^2$	$\gamma(t) = (t, 1, t), t \in \mathbb{R}$
$z^2 = x^2 + y^2 + 1$	$\gamma(t) = (1, \operatorname{tg} t, \sec t), t \in [0, \frac{\pi}{2}[$
$z^2 = x^2 + y^2 - 1$	$\gamma(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t, \sqrt{t^2+1}), t \in \mathbb{R}$



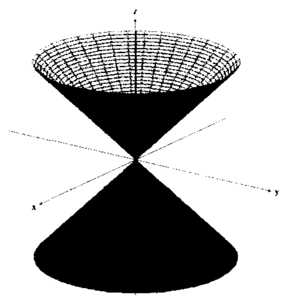
$\gamma(t) = (t, 2t, 3t^2)$



$\gamma(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t, \sqrt{t^2+1})$



$\gamma(t) = (t, 1, t)$



$\gamma(t) = (1, \operatorname{tg} t, \sec t)$

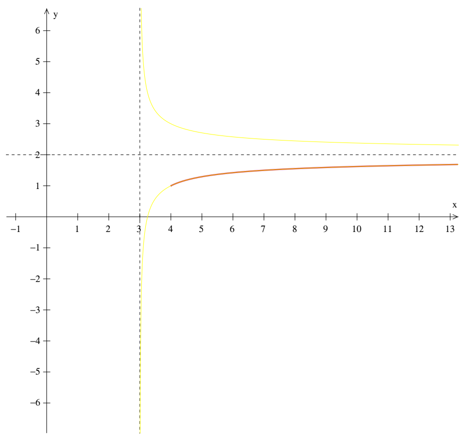
A

1. (a) **(1,5)** Sejam $\gamma(t) = (\sec^2 t + 3, 2 - \cos t), t \in [0, \frac{\pi}{2}[$ e $f(x,y) = ((x-3)(y-2)^2)^{\frac{2}{3}} + 1$. Esboce a imagem de γ e mostre que a imagem de γ está contida em uma curva de nível de f indicando qual é o nível.

Resolução:

$f(\gamma(t)) = f(\sec^2 t + 3, 2 - \cos t) = ((\sec^2 t + 3 - 3)(2 - \cos t - 2)^2)^{\frac{2}{3}} + 1 =$ $((\sec t)^2(-\cos t)^2)^{\frac{2}{3}} + 1 = 2, \ \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, portanto a imagem de γ está contida na curva de nível 2 de f.

$\gamma : \begin{cases} x = \sec^2 t + 3 \\ y = 2 - \cos t \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{(y-2)^2} + 3$, com $1 \leq y < 2$ e $x \geq 4$.



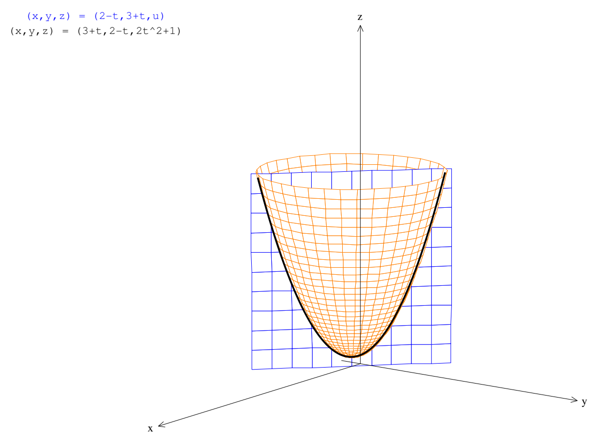
(b) **(1,0)** Sejam $g(x,y) = (x-3)^2 + (y-2)^2 + 1$ e $\Gamma(t) = (3+t, 2-t, z(t)), t \in \mathbb{R}$. Sabendo que a imagem de Γ está contida no gráfico de g, encontre $z(t)$. Esboce a imagem de Γ.

Resolução:

$z(t) = g(3+t, 2-t) = (3+t-3)^2 + (2-t-2)^2 + 1 = 2t^2 + 1$.

$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 - t \end{cases} \Rightarrow x + y = 5$. Portanto, $\Gamma(\mathbb{R})$ é a intersecção do gráfico de g (parabolóide) e o plano $x + y = 5$.

Uma parametrização de Γ é dada por $\Gamma(t) = (3+t, 2-t, 2t^2+1), t \in \mathbb{R}$.



B

2. Calcule os seguintes limites, caso existam. Se não existirem, explique por quê:

(a) **(1,0)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x^3y+2y^3-x^7}{x^6+5y^2}$

(b) **(1,0)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3(1-\cos(x^2+y^2))}{(x^2+y^2)^3}$

a) Seja $f(x,y) = \dfrac{4x^3y+2y^3-x^7}{x^6+5y^2}$. Temos: $f(t,0) = \dfrac{-t^7}{t^6} = -t$ se $t\neq 0$

e $f(t,t^3) = \dfrac{4t^6+2t^9-t^7}{6t^6} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t}{6}$, se $t\neq 0$. Quando $t\to 0$,

temos que $(t,0)\to(0,0)$ e $(t,t^3)\to(0,0)$, mas

$\lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} -t = 0$ e $\lim_{t\to 0} f(t^3,t) = \lim_{t\to 0}\left(\dfrac{2}{3} - \dfrac{t^3}{3} - \dfrac{t}{6}\right) = \dfrac{2}{3}$

Como esses dois limites são diferentes, concluímos que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\underset{\downarrow\, 0}{y}\,\underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\text{limitada}}}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\left(\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right)}_{\downarrow\, 1/2} = 0\cdot\frac{1}{2} = 0$$

Justificativa: 1) a função $h(x,y) = \dfrac{y^2}{x^2+y^2}$ é limitada (pois $0\leq \dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leq \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \leq 1$) e $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y = 0$. Logo $\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\dfrac{y^2}{x^2+y^2} = 0$

2) $\lim_{t\to 0} \dfrac{1-\cos t}{t^2} \overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{2t} = \dfrac{1}{2}$

Como $x^2+y^2\to 0$ quando $(x,y)\to(0,0)$, temos que

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} = \lim_{t\to 0} \dfrac{1-\cos t}{t^2} = 0$

Questão 3. (2,0) Seja $f(x,y) = \dfrac{(x-1)^2 + 3(y-1)^2}{y^2 - x^2}$.

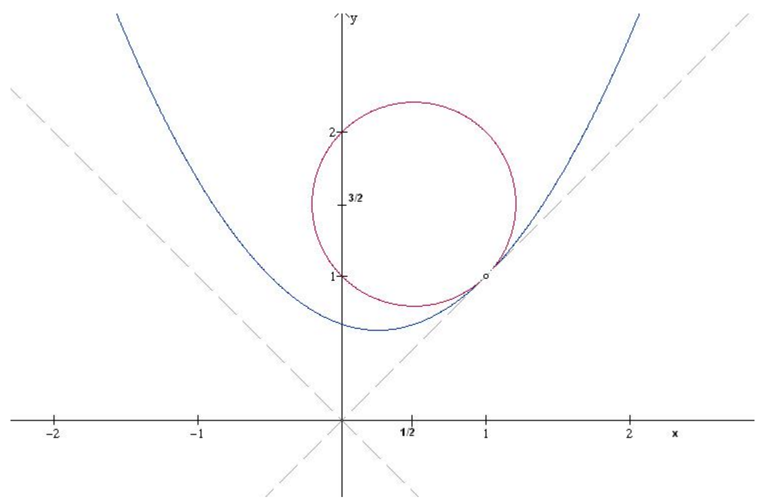
1. Esboce (no mesmo sistema de coordenadas) as curvas de nível de f nos níveis $k = 1$ e $k = 3$.

2. Existe $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$? **Justifique.**

a) Domínio de $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \neq y^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \neq |y|\}$.

$$\begin{aligned} f(x,y) = k \quad &\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + 3(y-1)^2 = ky^2 - kx^2 \ \text{ e } \ |x| \neq |y| \\ &\Leftrightarrow \quad (3-k)y^2 - 6y + (1+k)x^2 - 2x + 4 = 0 \ \text{ e } \ |x| \neq |y|. \end{aligned}$$

Se k=3: $\quad -6y + 4x^2 - 2x + 4 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(2x^2 - x + 2)$ (Parábola).
Se k=1: $\quad 2x^2 - 2x + 2y^2 - 6y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{2}$ (Círculo).



b) $\lim\limits_{t\to 1} f(t,1) = \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{(t-1)^2}{1-t^2} = \lim\limits_{t\to 1} \dfrac{1-t}{1+t} = 0.$

Por outro lado, a imagem da curva $\gamma(t) = (\frac{1}{2} + \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2} + \frac{\sin t}{\sqrt{2}})$, $(t \in [0, 2\pi])$ está contida na curva de nível $k = 1$ para $t \neq \frac{7\pi}{4}$ e $\gamma(\frac{7\pi}{4}) = (1,1)$. Assim, $\lim\limits_{t\to \frac{7\pi}{4}} f(\gamma(t)) = 1$ e vemos que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$ não existe.

4. Sejam S_1 e S_2 as superfícies

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = (x-1)^2 - y^2\} \text{ e } S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z = 2x^2 + y^2 - 2\}.$$

(a) **(1,0)** Encontre uma parametrização para a curva dada pela intersecção de S_1 e S_2. Isto é, encontre um intervalo $I \subset \mathbb{R}$ e uma função $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ tal que a imagem de γ seja igual a $S_1 \cap S_2$.

(b) **(1,0)** Determine a equação da reta tangente a $S_1 \cap S_2$ no ponto $(0, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2})$.

(a) Seja $(x,y,z) \in S_1 \cap S_2$. Então

$z = (x-1)^2 - y^2 = 2x^2 + y^2 - 2$

Logo $x^2 + 2x + 1 + 2y^2 = 4 \Rightarrow$

$(x+1)^2 + 2y^2 = 4 \Rightarrow$

$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1 \quad (*)$

Para cada par (x,y) que satisfaz $(*)$, $\exists\, t \in [0, 2\pi[$ tal que $\frac{x+1}{2} = \cos t$ e $\frac{y}{\sqrt{2}} = \operatorname{sen} t$.

Reciprocamente, se $\frac{x+1}{2} = \cos t$ e $\frac{y}{\sqrt{2}} = \operatorname{sen} t$, então (x,y) satisfaz $(*)$.

Assim $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$ se, e só se $\exists\, t \in [0, 2\pi[$ tal que $x = 2\cos t - 1$, $y = \sqrt{2}\operatorname{sen} t$

Como $z = 2x^2 + y^2 - 2 \Rightarrow z = 2(2\cos t - 1)^2 + 2\operatorname{sen}^2 t - 2$

Assim: $\gamma : [0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\gamma(t) = (2\cos t - 1, \sqrt{2}\operatorname{sen} t, 2(2\cos t - 1)^2 + 2\operatorname{sen}^2 t - 2)$

é uma parametrização para $S_1 \cap S_2$.

(b) Queremos achar $t_0 \in [0, 2\pi[$ com $\gamma(t_0) = (0, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2})$

Assim $2\cos t_0 - 1 = 0$ (e com isto $2(2\cos t_0 - 1)^2 + 2\operatorname{sen}^2 t_0 - 2 = -\frac{1}{2}$)

$\sqrt{2}\operatorname{sen} t_0 = \sqrt{6}/2$

Logo: $\cos t_0 = 1/2$ e $\operatorname{sen} t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t_0 = \frac{\pi}{3}$.

Como $\vec{\gamma'}(t) = (-2\operatorname{sen} t, \sqrt{2}\cos t, 4(2\cos t - 1)(-2\operatorname{sen} t) + 4\operatorname{sen} t\cos t)$

temos que $\vec{\gamma'}(\pi/3) = (-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}) \neq \vec{0}$.

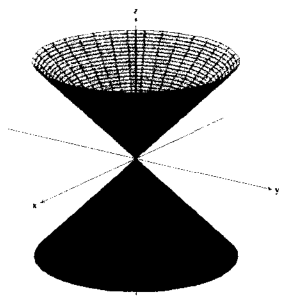
Assim, uma equação vetorial para a reta tangente é:

$X = (0, \sqrt{6}/2, -\frac{1}{2}) + \lambda\left(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}\right), \ \lambda \in \mathbb{R}.$

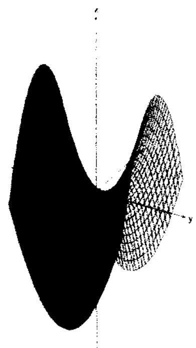
B

5. **(1,5)** Cada uma das figuras abaixo representa uma superfície. Na coluna 1 da tabela temos uma equação para cada uma dessas superfícies. Cada superfície contém a imagem de uma das curvas da coluna 2. Escreva abaixo de cada figura qual é a curva cuja imagem está contida na superfície que ela representa.

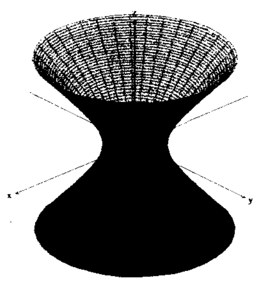
1	2
$z^2 = x^2 + y^2 + 1$	$\gamma(t) = (t, 2t, 3t^2), t \in \mathbb{R}$
$z = y^2 - x^2$	$\gamma(t) = (1, t, t), t \in \mathbb{R}$
$z^2 = x^2 + y^2 - 1$	$\gamma(t) = (\operatorname{tg} t, 1, \sec t), t \in [0, \frac{\pi}{2}[$
$z^2 = x^2 + y^2$	$\gamma(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t, \sqrt{t^2+1}), t \in \mathbb{R}$



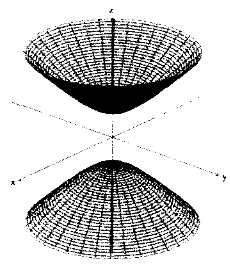
$\gamma(t) = (\operatorname{tg} t, 1, \sec t)$



$\gamma(t) = (t, 2t, 3t^2)$



$\gamma(t) = (1, t, t)$



$\gamma(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t, \sqrt{t^2+1})$