Questão 1. (3,0 pontos) Calcule as seguintes integrais indefinidas

a) $\int x^5 \cos(x^3+2)dx$

b) $\int \frac{3e^{2x}+2e^x}{(e^x-2)(e^{2x}+4)}dx$

a) $\int x^5 \cos(x^3+2)\,dx \underset{(t=x^3+2 \Rightarrow dt=3x^2dx)}{=} \frac{1}{3}\int (t-2)\cos t\,dt \underset{\left(\begin{array}{l} u=t-2 \to du=dt \\ dv=\cos t\,dt \to v=\operatorname{sen} t \end{array}\right)}{=} \frac{1}{3}\left((t-2)\operatorname{sen} t - \int \operatorname{sen} t\,dt\right)$

$= \frac{1}{3}\left((t-2)\operatorname{sen} t + \cos t\right) + C = \frac{1}{3}\left(x^3 \operatorname{sen}(x^3+2) + \cos(x^3+2)\right) + C.$

b) $\int \frac{3e^{2x}+2e^x}{(e^x-2)(e^{2x}+4)}\,dx \underset{t=e^x \to dt=e^x dx}{=} \int \frac{3t+2}{(t-2)(t^2+4)}\,dt$

$\frac{3t+2}{(t-2)(t^2+4)} = \frac{A}{t-2} + \frac{Bt+C}{t^2+4} = \frac{A(t^2+4)+(Bt+C)(t-2)}{(t-2)(t^2+4)}$

$t=2 \Rightarrow 8=8A \Rightarrow A=1$

$t=0 \Rightarrow 2=4-2C \Rightarrow C=1$

$t=1 \Rightarrow 5=5-B-1 \Rightarrow B=-1$

$\int \frac{1}{t-2}\,dt = \ln|t-2| + C_1$

$\int \frac{t}{t^2+4}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+4}\,dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+4) + C_2.$

$\int \frac{1}{t^2+4}\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\,dt \underset{u=\frac{t}{2} \Rightarrow du=\frac{dt}{2}}{=} \frac{1}{4}\int \frac{1.2\,du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u + C_3 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) + C_3.$

logo,

$\int \frac{3t+2}{(t-2)(t^2+4)}\,dt = \int \frac{1}{t-2}\,dt - \int \frac{t}{t^2+4}\,dt + \int \frac{1}{t^2+4}\,dt =$

$= \ln|t-2| - \frac{1}{2}\ln(t^2+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) + C = \ln|e^x-2| - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+4) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{e^x}{2}\right) + C$

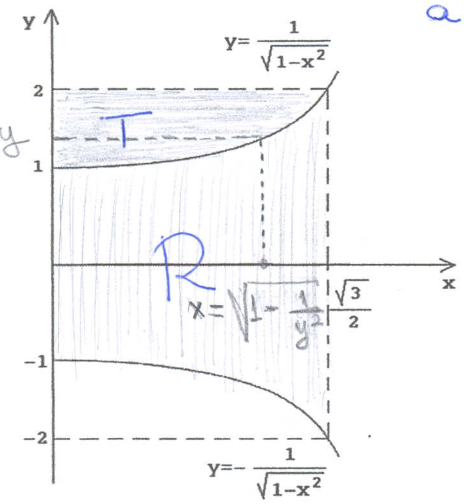
A e -B-

Questão 2. (2,5 pontos) Considere a região

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right\}.$$

a) Determine o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno da reta $y = 2$.

b) Determine o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo $0y$.



a) O volume é igual a

$$\pi \int_0^{\sqrt{3}/2} \left[\left(2 - \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2 - \left(2 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2\right] dx$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{8}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 8\pi \operatorname{arcsen} x \Big|_0^{\sqrt{3}/2}$$

$$= 8\pi\left(\operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arcsen} 0\right) = \frac{8}{3}\pi^2$$

b) Se $x \in [0, \sqrt{3}/2]$ e $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ então

$1 - x^2 = \frac{1}{y^2}$ e, portanto, $x = \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}}$

O volume do sólido obtido pela rotação da região T (ver figura) em torno de $0y$ é

$$\pi \int_1^2 \left(\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}\right)^2 dy = \pi \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{y^2}\right) dy = \pi\left(y + \frac{1}{y}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \pi\left(2 + \frac{1}{2} - (1+1)\right) = \frac{\pi}{2}$$

O volume do cilindro de altura 2, cujo raio da base é $\frac{\sqrt{3}}{2}$, é $\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 2 = \frac{3\pi}{2}$

Portanto, o volume pedido é igual a

$$2\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$$

Questão 3 - A

a) Calcule $\displaystyle\int_3^{3\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}dx$

b) Mostre que o gráfico da função $F :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_1^{1/x^3} \left(\frac{1}{1+t^4} + t^{-4/3} \right) dt - 3\int_x^0 \frac{t^8}{1+t^{12}} dt$$

é parte de uma reta. Determine o coeficiente angular dessa reta.

Solução:

a) Fazendo a substituição $x = 3\tan(\theta)$ e, em seguida, $u = \mathrm{sen}(\theta)$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_3^{3\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+9}}dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{3\sec^2(\theta)}{9\tan^2(\theta)\sqrt{9\tan^2(\theta)+9}}d\theta = \frac{1}{9}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec(\theta)}{\tan^2(\theta)}d\theta \\ &= \frac{1}{9}\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos(\theta)}{\mathrm{sen}^2(\theta)}d\theta = \frac{1}{9}\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{u^2}du = (-\frac{1}{9u})\Big|_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \\ &= \frac{2}{9}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

b) A derivada da função F é constante

$$F'(x) = \left(\frac{1}{1+(\frac{1}{x^3})^4} + x^4 \right)\left(-\frac{3}{x^4}\right) + 3\frac{x^8}{1+x^{12}} = -\frac{3x^8}{1+x^{12}} - 3 + \frac{3x^8}{1+x^{12}} = -3$$

Portanto $F(x) = -3x + c$. O gráfico de F é uma reta com coeficiente angular -3.

Questão 4. (2,0 pontos)

a) Seja $n \geq 1$ um inteiro. Determine $P_n(x)$ o Polinômio de Taylor de ordem n de $f(x) = e^{2x}$ em torno do ponto $x = 0$. Obtenha uma expressão para o erro $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$, em que $x \in \mathbb{R}$.

b) Use o polinômio do item anterior para estimar $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{10} e^{2x} dx$ com erro menor que 10^{-5}.

a)
$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow f(0) = 1$$
$$f'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow f'(0) = 2$$
$$f''(x) = 2^2 e^{2x} \Rightarrow f''(0) = 2^2$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = 2^n e^{2x} \Rightarrow f^{(n)}(0) = 2^n$$

$$\therefore \underset{x_0=0}{P_n(x)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)\, x^i}{i!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{2^i x^i}{i!} = 1 + 2x + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^3 x^3}{3!} + \dots + \frac{2^n x^n}{n!}$$

Resto de Lagrange: $E_n(x) = f(x) - P_n(x) = f^{(n+1)}(\bar{x}) \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{2^{n+1} e^{2\bar{x}} x^{n+1}}{(n+1)!}$

onde $\begin{cases} \bar{x} \in]0, x[\text{ se } x > 0 \\ \bar{x} \in]x, 0[\text{ se } x < 0 \end{cases}$ OBS: $\bar{x}$ depende de x

b)
$$\left| \int_0^{1/2} x^{10} e^{2x}\, dx - \int_0^{1/2} x^{10} P_n(x)\, dx \right| = \left| \int_0^{1/2} x^{10} E_n(x)\, dx \right|$$

$$= \left| \int_0^{1/2} x^{10} \frac{2^{n+1} e^{2\bar{x}} x^{n+1}}{(n+1)!} dx \right| \underset{(2\bar{x}<1)}{\leq} \int_0^{1/2} \frac{x^{n+11} \cdot 3 \cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} dx$$

← depende de x

$$= \frac{1}{(n+12)(n+1)!} \frac{1}{2^{n+12}} 2^{n+1} \cdot 3 = \frac{3}{(n+12)(n+1)!\, 2^{11}} < 10^{-5}$$

se $n \geqslant 3$

$$\therefore \int_0^{1/2} x^{10} e^{2x}\, dx \simeq \int_0^{1/2} x^{10} \left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3} x^3\right) dx$$

$$= \frac{1}{11 \cdot 2^{11}} + \frac{2}{12 \cdot 2^{12}} + \frac{2}{13 \cdot 2^{13}} + \frac{4}{3 \cdot 14 \cdot 2^{14}}$$ com erro $< 10^{-5}$

Questão 1. (3,0 pontos) Calcule as seguintes integrais indefinidas

a) $\displaystyle\int x^5\cos(x^3+3)dx$

b) $\displaystyle\int \frac{3e^{2x}+7e^x}{(e^x-2)(e^{2x}+9)}dx$

a) $\displaystyle\int x^5\cos(x^3+3)\,dx = \int (t-3)\cos t\,\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\int (t-3)\cos t\,dt = \frac{1}{3}\left((t-3)\operatorname{sen} t - \int \operatorname{sen} t\,dt\right)$

$(t=x^3+3 \Rightarrow dt=3x^2dx)$

$u=t-3 \to du=dt$

$dv=\cos t\,dt \to v=\operatorname{sen} t$

$= \frac{1}{3}\left((t-3)\operatorname{sen} t + \cos t\right)+C = \frac{1}{3}\left(x^3\operatorname{sen}(x^3+3)+\cos(x^3+3)\right)+C$

b) $\displaystyle\int \frac{3e^{2x}+7e^x}{(e^x-2)(e^{2x}+9)}dx = \int \frac{3t+7}{(t-2)(t^2+9)}dt$

$t=e^x \Rightarrow dt=e^x dx$

$\displaystyle\frac{3t+7}{(t-2)(t^2+9)} = \frac{A}{t-2}+\frac{Bt+C}{t^2+9} = \frac{A(t^2+9)+(Bt+C)(t-2)}{(t-2)(t^2+9)}$

$t=2 \Rightarrow 13=13A \Rightarrow A=1.$

$t=0 \Rightarrow 7=9-2C \Rightarrow C=1.$

$t=1 \Rightarrow 10=10-B-1 \Rightarrow B=-1.$

$\displaystyle\int \frac{1}{t-2}dt = \ln|t-2|+C_1$

$\displaystyle\int \frac{t}{t^2+9}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{t^2+9}dt = \frac{1}{2}\ln(t^2+9)+C_2.$

$\displaystyle\int \frac{1}{t^2+9}dt = \frac{1}{9}\int \frac{1}{(\frac{t}{3})^2+1}dt = \frac{1}{9}\int \frac{1}{u^2+1}\cdot 3\,du = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} u + C_3 = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{3}\right)+C_3.$

$u=\frac{t}{3} \Rightarrow du=\frac{dt}{3}$

logo,

$\displaystyle\int \frac{3t+7}{(t-2)(t^2+9)}dt = \ln|t-2| - \frac{1}{2}\ln(t^2+9)+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{3}\right)+C$

$\displaystyle = \ln|e^x-2| - \frac{1}{2}\ln(e^{2x}+9)+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{e^x}{3}\right)+C.$

Questão 3 - B

a) Calcule $\displaystyle\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx$

b) Mostre que o gráfico da função $F:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \int_1^{1/x^3}\left(\frac{1}{1+t^4} + t^{-4/3}\right)dt - 3\int_x^0 \frac{t^8}{1+t^{12}}dt$$

é parte de uma reta. Determine o coeficiente angular dessa reta.

Solução:

a) Fazendo a substituição $x = 2\tan(\theta)$ e, em seguida, $u = \text{sen}(\theta)$ obtemos

$$\begin{aligned}\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}dx &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{2\sec^2(\theta)}{4\tan^2(\theta)\sqrt{4\tan^2(\theta)+4}}d\theta = \frac{1}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\sec(\theta)}{\tan^2(\theta)}d\theta \\ &= \frac{1}{4}\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\cos(\theta)}{\text{sen}^2(\theta)}d\theta = \frac{1}{4}\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2}\frac{1}{u^2}du = (-\frac{1}{4u})\Big|_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\end{aligned}$$

b) A derivada da função F é constante

$$F'(x) = \left(\frac{1}{1+(\frac{1}{x^3})^4} + x^4\right)\left(-\frac{3}{x^4}\right) + 3\frac{x^8}{1+x^{12}} = -\frac{3x^8}{1+x^{12}} - 3 + \frac{3x^8}{1+x^{12}} = -3$$

Portanto $F(x) = -3x + c$. O gráfico de F é uma reta com coeficiente angular -3.