1. **(3,5)** Seja $f(x) = \dfrac{e^{\frac{2}{x}}}{x}$.

   (a) Determine o domínio de f e os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

   (b) Verifique que $f''(x) = e^{\frac{2}{x}} \left(\dfrac{2x^2 + 8x + a}{x^5} \right)$. Determine a e estude a concavidade de f.

   (c) Calcule os limites necessários e esboce o gráfico de f.

a) $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$f'(x) = e^{\frac{2}{x}} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x} + e^{2/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{2/x}\left(-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right) = e^{2/x}\left(\frac{-2-x}{x^3}\right)$$

$f'(x) = 0$ se $x = -2$

		-2	0
$-2-x$	$+$	$-$	$-$
x^3	$-$	$-$	$+$
f'	$-$	$+$	$-$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

f é estritamente crescente em $[-2, 0[$ e estritamente decrescente em $]-\infty, -2]$ e em $]0, +\infty[$.

$\left(-2, -\frac{1}{2e}\right)$ é ponto de mínimo local.

b) $$f''(x) = e^{2/x}\left(-\frac{2}{x^2}\right)\left(-\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right) + e^{2/x}\left(\frac{6}{x^4} + \frac{2}{x^3}\right) = e^{2/x}\left(\frac{4}{x^5} + \frac{2}{x^4} + \frac{6}{x^4} + \frac{2}{x^3}\right) = e^{2/x}\left(\frac{2x^2 + 8x + 4}{x^5}\right) \quad \boxed{a = 4}$$

$f''(x) = 0$ se $x^2 + 4x + 2 = 0 \therefore x = -2 \pm \sqrt{2}$.

		$-2-\sqrt{2}$	$-2+\sqrt{2}$	0
$2x^2+8x+4$	$+$	$-$	$+$	$+$
x^5	$-$	$-$	$-$	$+$
f''	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

f tem concavidade p/ baixo em $]-\infty, -2-\sqrt{2}[$ e em $]-2+\sqrt{2}, 0[$

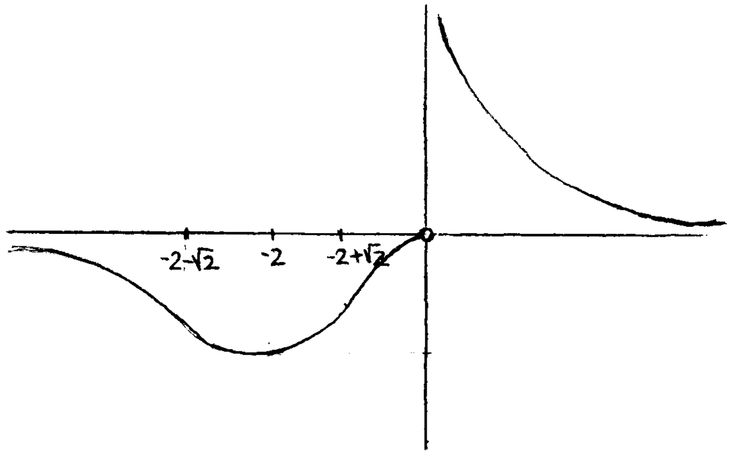
f tem concavidade p/ cima em $]-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}[$ e em $]0, +\infty[$

$\left(-2-\sqrt{2}, \dfrac{e^{\frac{2}{-2-\sqrt{2}}}}{-2-\sqrt{2}}\right)$ e $\left(-2+\sqrt{2}, \dfrac{e^{\frac{2}{-2+\sqrt{2}}}}{-2+\sqrt{2}}\right)$ são pontos de inflexão

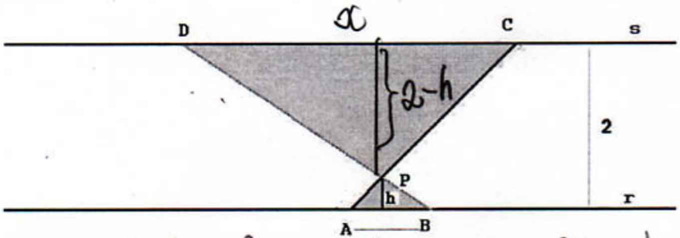
c) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2/x}}{x} = 0 = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{2/x}}{x} \quad \left(\text{pois } \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \text{ e } \lim_{x \to +\infty} e^{2/x} = 1 = \lim_{x \to -\infty} e^{2/x}\right)$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{2/x}}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{2/x}}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{1}{x}}{e^{-\frac{2}{x}}} \underset{L'H}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x \to 0^-} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{-\frac{2}{x}}\left(\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x \to 0^-} -\frac{e^{\frac{2}{x}}}{2} = 0.$$



2. (a) **(2,0)** Na figura abaixo, r e s são retas paralelas, a distância entre elas é 2, C é um ponto **fixo** de s, A e B são pontos **fixos** de r e a distância entre eles é 1. É possível encontrar um ponto D na reta s, de modo que o segmento BD intercepte AC e que a soma das áreas dos triângulos sombreados na figura seja mínima? E máxima? Nos casos em que a resposta for afirmativa, encontre a altura h do triângulo ABP.



Outra solução na prova A.

Seja $DC = x$. Como o triângulo DCP é semelhante a ABP, temos que $\boxed{\dfrac{x}{1} = \dfrac{2-h}{h}}$. Logo $xh = 2-h \Rightarrow$

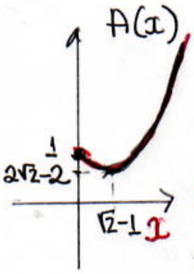
$\therefore h(1+x) = 2$ $\quad h = \dfrac{2}{1+x}$

A soma das áreas dos triângulos DCP e ABP é

$$A = \frac{x(2-h)}{2} + \frac{h}{2}.$$

Escrevendo A em função de x temos

$$A(x) = \frac{1}{2}\left[2x - \frac{2x}{1+x} + \frac{2}{1+x}\right] = x - \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x}.$$



Temos então que analisar a função $A(x)$ no intervalo $[0, +\infty[$. (Aqui $x = 0$ tem o sentido de $C = D = P$.)

$$\lim_{x\to+\infty} A(x) = \lim_{x\to+\infty}\Big(\underbrace{x}_{\to+\infty} - \underbrace{\frac{x}{1+x}}_{\to 1} + \underbrace{\frac{1}{1+x}}_{\to 0}\Big) = +\infty \quad \text{e} \quad A(0) = 1$$

Agora $A'(x) = 1 - \dfrac{[(1+x) - x]}{(1+x)^2} - \dfrac{1}{(1+x)^2} = 1 - \dfrac{2}{(1+x)^2} = \dfrac{x^2+2x-1}{(1+x)^2}$.

Analisando o sinal de $A'(x)$ no intervalo $[0, +\infty[$ temos

	0		$-1+\sqrt{2}$	
$A'(x)$		$- - -$		$+ + + +$
$A(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

Logo $x = -1+\sqrt{2}$ é ponto de mínimo de $A(x)$. A função $A(x)$ não tem máximo, pois $\lim_{x\to+\infty} A(x) = +\infty$. Quando $x = -1+\sqrt{2}$, $h = \sqrt{2}$, a soma das áreas é MÍNIMA. Não tem máximo.

(b) **(1,5)** Calcule

$$\lim_{x\to 0^+} (1+2x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(3x)}}$$

Temos que $(1+2x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(3x)}} = e^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(3x)}\cdot\ln(1+2x)}$.

Seja $u = u(x) = \dfrac{\ln(1+2x)}{\operatorname{arctg}(3x)}$

$$\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{\ln(1+2x)}^{\to 0}}{\underbrace{\operatorname{arctg}(3x)}_{\to 0}} \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\overbrace{\frac{2}{1+2x}}^{\to 2}}{\underbrace{\frac{3}{1+9x^2}}_{\to 3}} = \frac{2}{3}$$

Como a exponencial é uma função contínua,

$$\lim_{x\to 0^+}(1+2x)^{\frac{1}{\operatorname{arctg}(3x)}} = \lim_{u\to 2/3} e^{u} = \underline{\underline{e^{2/3}}}.$$

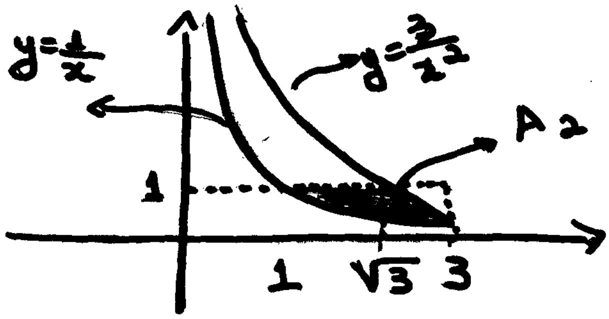
3. (a) **(1,5)** Calcule a área da região

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \le 1, \frac{1}{x} \le y \le \frac{3}{x^2} \right\}$$

$\frac{1}{x} = \frac{3}{x^2} \Leftrightarrow x = 3$

$0 < x \le 3 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} \le \frac{3}{x^2}$

$3 < x \Rightarrow \frac{3}{x^2} < \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$



$(x > 0 \text{ e } \frac{1}{x} \le 1) \Leftrightarrow x \geq 1$

$(x > 0 \text{ e } \frac{3}{x^2} \le 1) \Leftrightarrow x \geq \sqrt{3}$

$A_1 = \int_1^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = x \Big|_1^{\sqrt{3}} - \ln x \Big|_1^{\sqrt{3}}$

$A_1 = \sqrt{3} - 1 - \ln\sqrt{3} + \ln 1$

$A_2 = \sqrt{3} - 1 - \ln\sqrt{3}$

$A_2 = \int_{\sqrt{3}}^{3} \left(\frac{3}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{-3}{x}\Big|_{\sqrt{3}}^{3} - \ln x \Big|_{\sqrt{3}}^{3}$

$A_2 = -1 + \frac{3}{\sqrt{3}} - \ln 3 + \ln\sqrt{3}$

$A_2 = \sqrt{3} - 1 - \ln\sqrt{3}$

$A_1 + A_2 = 2(\sqrt{3} - 1 - \ln\sqrt{3})$

$\boxed{\text{Resposta: } 2(\sqrt{3} - 1 - \ln\sqrt{3})}$ (ou $2\sqrt{3} - 2 - \ln 3$)

(b) Seja $f(x) = x^7 + \pi x^3 - 8x^2 + ex + 1$.

i. **(1,0)** Quantas raízes reais distintas tem a equação $f''(x) = 0$?

ii. **(0,5)** Mostre que a equação $f(x) = 0$ tem exatamente três raízes reais distintas. **Mencione os teoremas utilizados.**

i) $f'(x) = 7x^6 + 3\pi x^2 - 16x + e$

$f''(x) = 42x^5 + 6\pi x - 16$ $\qquad f'''(x) = 210x^4 + 6\pi$

Como $f'''(x) > 0$ para todo x, f'' é estritamente crescente e portanto a equação $f''(x) = 0$ tem, no máximo, uma raiz real. Mas $f''(0) = -16 < 0$ e $f''(1) = 42 + 6\pi - 16 > 60 - 16 > 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existe c em $]0,1[$ tal que $f''(c) = 0$. Assim, a equação $f''(x) = 0$ tem uma (e apenas uma) raiz real

ii) $f(-1) = -1 - \pi - 8 - e + 1 = -\pi - 8 - e < 0$ pois $e + \pi < 6 < 8$

$f(0) = 1 > 0$

$f(1) = 1 + \pi - 8 + e + 1 = 2 + e + \pi - 8 < 2 + 6 - 8 < 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^7 \left(1 + \frac{\pi}{x^4} - \frac{8}{x^5} + \frac{e}{x^6} + 1 \right) = +\infty$$ e

portanto existe $M > 1$ tal que $f(M) > 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, a equação $f(x) = 0$ tem, pelo menos, três raízes reais distintas x_1, x_2, x_3, com $-1 < x_1 < 0$, $0 < x_2 < 1$, $1 < x_3 < M$. Vamos mostrar que a equação $f(x) = 0$ não pode ter mais do que três raízes reais distintas. Em i), vimos que f'' se anula apenas em um ponto. Aplicando o TVM para f', concluímos que f' se anula, no máximo, duas vezes (De fato, se existissem a, b e c com $a < b < c$ tais que $f'(a) = f'(b) = f'(c) = 0$ então f'' se anularia uma vez em $]a, b[$ e uma vez em $]b, c[$ e, portanto, se anularia pelo menos duas vezes) Aplicando o TVM novamente, desta vez para f, concluímos que f se anula, no máximo, três vezes, já que f' se anula, no máximo duas vezes.

Observação: f, f', f'' são deriváveis em $\mathbb{R}$ e, portanto, são contínuas em $\mathbb{R}$. Assim f, f', f'' verificam as hipóteses do T.V.I. e do T.V.M. em qualquer intervalo $[a, b]$.