1. **(3,5)** Seja $f(x) = \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$.

   (a) Determine o domínio de f e os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

   (b) Verifique que $f''(x) = e^{-\frac{1}{x}} \left(\dfrac{2x^2 - 4x + a}{x^5} \right)$. Determine a e estude a concavidade de f.

   (c) Calcule os limites necessários e esboce o gráfico de f.

a) $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$f'(x) = e^{-1/x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} + e^{-1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{-1/x}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right) = e^{-1/x}\left(\frac{1-x}{x^3}\right)$$

$f'(x) = 0$ se $x = 1$

		0		1	
$1-x$	+	‖	+		−
x^3	−	‖	+		+
f'	−	‖	+		−
f	↘	‖	↗		↘

f é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $[1, +\infty[$

f é estritamente crescente em $]0, 1]$.

$(1, \frac{1}{e})$ é ponto de máximo local

b) $$f''(x) = e^{-1/x} \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right) + e^{-1/x}\left(-\frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^3}\right) = e^{-1/x}\left(\frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^4} - \frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^3}\right) = e^{-1/x}\left(\frac{2x^3 - 4x + 1}{x^5}\right)$$ $\boxed{a = 1}$

$f''(x) = 0$ se $2x^2 - 4x + 1 = 0$ $\therefore x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

		0		$1-\frac{\sqrt{2}}{2}$		$1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$2x^3 - 4x + 1$	+	‖	+		−		+
x^5	−	‖	+		+		+
f''	−	‖	+		−		+
f	∩	‖	∪		∩		∪

f tem concavidade para baixo em $]-\infty, 0[$ e em $]1-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\frac{\sqrt{2}}{2}[$

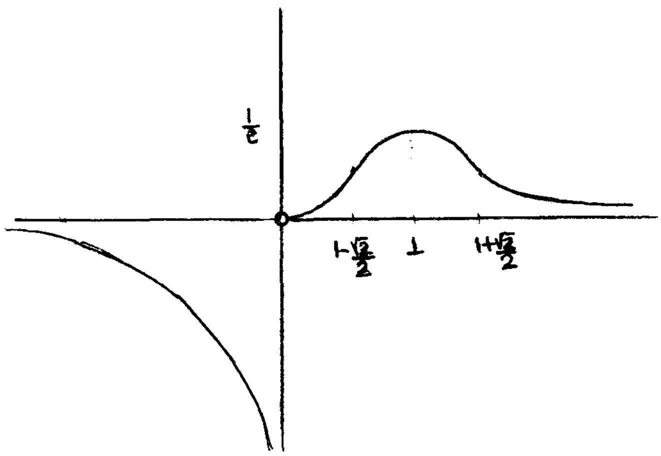
f tem concavidade para cima em $]0, 1-\frac{\sqrt{2}}{2}[$ e em $]1+\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty[$.

$\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2e^{\frac{2}{\sqrt{2}-2}}}{2-\sqrt{2}}\right)$ e $\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2e^{\frac{-2}{2+\sqrt{2}}}}{2+\sqrt{2}}\right)$ são pontos de inflexão

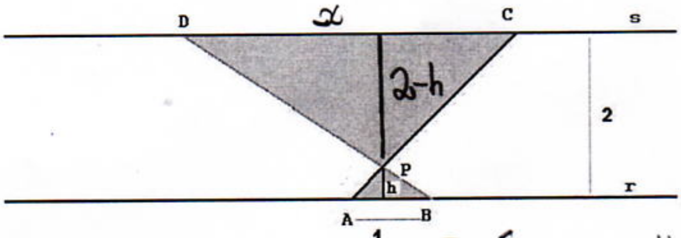
c) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-1/x}}{x} = 0 = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{-1/x}}{x} \quad \left(\text{pois } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \text{ e } \lim_{x \to +\infty} e^{-1/x} = 1 = \lim_{x \to -\infty} e^{-1/x}\right)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{-1/x}}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{e^{1/x}} \underset{L'H}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to 0^+} e^{-1/x} = 0.$$



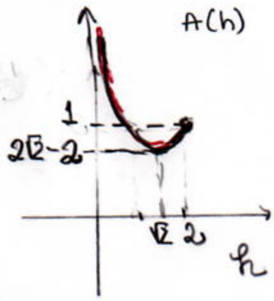
2. (a) **(2,0)** Na figura abaixo, r e s são retas paralelas, a distância entre elas é 2, C é um ponto **fixo** de s, A e B são pontos **fixos** de r e a distância entre eles é 1. É possível encontrar um ponto D na reta s, de modo que o segmento BD intercepte AC e que a soma das áreas dos triângulos sombreados na figura seja mínima? E máxima? Nos casos em que a resposta for afirmativa, encontre a altura h do triângulo ABP.



Outra solução na prova B.

Seja $DC = x$. Como o triângulo DCP é semelhante ao triângulo ABP, temos que

$$\boxed{\frac{x}{1} = \frac{2-h}{h}}.$$



A soma das áreas dos dois triângulos é:

$$A = \frac{x(2-h)}{2} + \frac{h \cdot 1}{2}.$$

Escrevendo a área em função de h, temos:

$$A(h) = \frac{1}{2}\left[\frac{(2-h)^2}{h} + h\right] = \frac{2}{h} - 2 + h.$$

Vamos então analisar a função $A(h)$ no intervalo $]0,2]$. ($h=2$ significa $D=C=P$)

$$\lim_{h\to 0^+} A(h) = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{2}{h} - 1 + h\right) = +\infty, \quad A(2) = 1.$$

$$A'(h) = -\frac{2}{h^2} + 1 = \frac{-2+h^2}{h^2}.$$

$A'(h)$: 0 $- - \sqrt{2} + + + + +$ 2

$A(h)$: 0 $\searrow$ $\sqrt{2}$ $\nearrow$ 2

Da análise acima temos que quando $h=\sqrt{2}$ a soma das áreas é <u>mínima</u>. Como $\lim_{h\to 0^+} A(h) = +\infty$, não temos ponto de máximo de $A(h)$. Assim, a soma das áreas é MÍNIMA quando $h=\sqrt{2}$ e <u>NÃO</u> tem MÁXIMO.

(b) **(1,5)** Calcule

$$\lim_{x\to 0^+} (1+3x)^{\frac{1}{\mathrm{arctg}(2x)}}$$

$$(1+3x)^{\frac{1}{\mathrm{arctg}(2x)}} = e^{\frac{1}{\mathrm{arctg}(2x)}\ln(1+3x)}$$

Seja $u = \dfrac{\ln(1+3x)}{\mathrm{arctg}(2x)}$. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\ln(1+3x)}^{\to 0}}{\underbrace{\mathrm{arctg}(2x)}_{\to 0}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{\frac{3}{1+3x}}^{\to 3}}{\underbrace{\frac{2}{1+4x^2}}_{\to 2}} = \frac{3}{2}$.

Como função exponencial é contínua, temos que

$$\lim_{x\to 0^+} (1+3x)^{\frac{1}{\mathrm{arctg}(2x)}} = \lim_{u\to 3/2} e^u = \underline{e^{3/2}}.$$

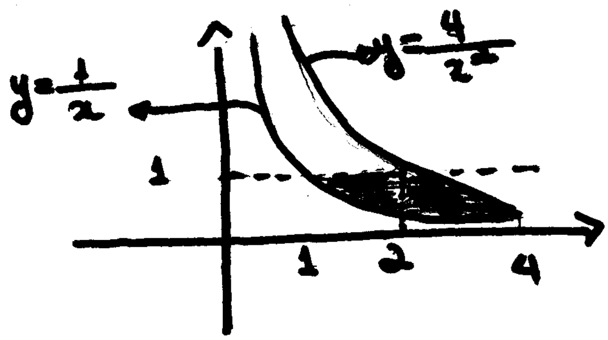
3. (a) **(1,5)** Calcule a área da região

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \leq 1, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{4}{x^2} \right\}$$

$\frac{1}{x} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x = 4$

$0 < x \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2} \leq \frac{4}{x^2}$

$4 < x \Rightarrow \frac{4}{x^2} < \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$



$\left(x > 0 \text{ e } \frac{1}{x} \leq 1\right) \Leftrightarrow x \geq 1$

$\left(x > 0 \text{ e } \frac{4}{x^2} \leq 1\right) \Leftrightarrow x \geq 2$

$A_1 = \int_1^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx = x \Big|_1^2 - \ln x \Big|_1^2$

$A_1 = 1 - \ln 2$

$A_2 = \int_2^4 \left(\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{-4}{x} \Big|_2^4 - \ln x \Big|_2^4$

$A_2 = -1 + 2 - \ln 4 + \ln 2$

$A_2 = 1 - \ln 2$

$A_1 + A_2 = 2 - 2\ln 2$

$\boxed{\text{Resposta: } 2 - 2\ln 2}$

(b) Seja $f(x) = x^7 + \pi x^3 - 8x^2 + ex + 1$.

i. **(1,0)** Quantas raízes reais distintas tem a equação $f''(x) = 0$?

ii. **(0,5)** Mostre que a equação $f(x) = 0$ tem exatamente três raízes reais distintas. **Mencione os teoremas utilizados.**

Veja prova B