Gabarito da Segunda Prova
MAT-2453 - Tipo A

17 de Maio de 2011

1-) Seja $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

(a) (0,8 pontos) Calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to 1^-} f(x)$.

(b) (0,7 pontos) Verifique que $f'(x) = \dfrac{(x-3)x^2}{(x-1)^3}$ e determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

(c) (1,0 ponto) Estude a concavidade de f.

(d) (1,0 ponto) Pesquise a existência de assíntotas em ∞ e $-\infty$; esboce o gráfico de f.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = +\infty;$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = -\infty.$

Como $\lim\limits_{x\to 1} x^3 = 1$, $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)^2 = 0$ e $(x-1)^2 > 0$ para todo $x \neq 1$,

podemos concluir que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

($\Rightarrow$ a reta $x=1$ é uma assíntota.)

(b) $f'(x) = \dfrac{3x^2(x-1)^2 - x^3\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{(3x^3-3x^2-2x^3)(x-1)}{(x-1)^4} = \dfrac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$

$\Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$. $\qquad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=3$.

		0		1		3	
$x-3$	$-$		$-$		$-$		$+$
$(x-1)^3$	$-$		$-$		$+$		$+$
f'	$+$		$+$		$-$		$+$
f	↗		↗		↘		↗

0 1 3
mínimo local

f é estritamente crescente em $]-\infty, 1[$ e em $[3, +\infty[$;

f é estritamente decrescente em $]1, 3]$.

$f(3) = \dfrac{27}{4}$

(c) $f''(x) = \dfrac{(3x^2-6x)(x-1)^3 - (x^3-3x^2)\cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} =$

$= \dfrac{(3x^2-6x)(x-1) - 3(x^3-3x^2)}{(x-1)^4} = \dfrac{6x}{(x-1)^4}$

		0		1	
f''	$-$		$+$		$+$
f	$\frown$		$\smile$		$\smile$

$\downarrow$
p. inflexão
$f(0) = 0$

f tem concavidade para baixo em $]-\infty, 0]$ e f tem concavidade para cima nos intervalos $[0, 1[$ e $]1, +\infty[$.

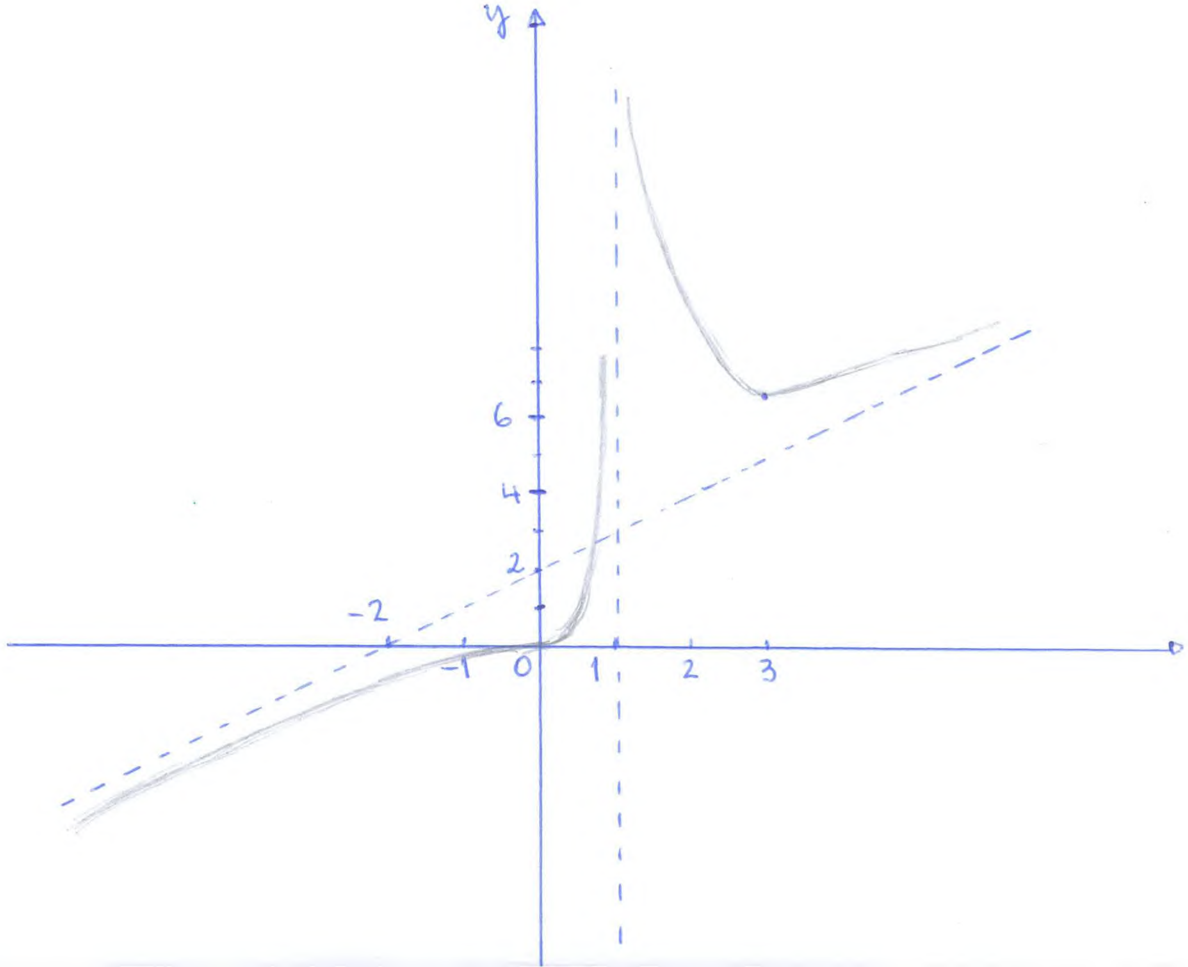
(d) Por divisão de polinômios vemos que é possível escrever f na forma $f(x) = x + 2 + \dfrac{3x}{(x-1)^2}$.

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{(x-1)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} = 0 \text{ e,}$$

de modo análogo, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (x+2)] = 0$.

Assim, o gráfico de f se aproxima do gráfico da reta $y = x + 2$ quando $x \to +\infty$ ou quando $x \to -\infty$, o que mostra que $y = x + 2$ é a equação da assíntota em $+\infty$ e $-\infty$.

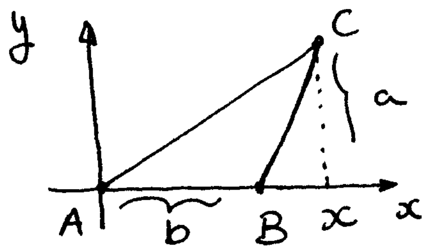
(veja outro modo de fazer na resolução da prova B)



2-) (a) (2,5 pontos) Sejam $a, b > 0$. Determine, caso exista, o perímetro mínimo dos triângulos de base b e altura (relativa à base dada) a.

(b) (1,0 ponto) Calcule, caso exista, $\lim_{x \to 0} (1 - \cos x)^x$.

a) Seja ΔABC um triângulo de base $\overline{AB}$ com $AB = b$ e altura a. Introduzimos um sistema de coordenadas no plano com origem em A e B no semi-eixo positivo das abcissas. Podemos supor que o vértice C está no semiplano $y > 0$. Seja x a coordenada do pé da perpendicular à base, passando por C, conforme ilustrado abaixo:



Então o perímetro P é dado por $P = AB + AC + BC = AC + BC + b$.

Temos 3 situações a examinar

1) Se $x \geq b$, então $P = \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{(x-b)^2+a^2} + b$

2) Se $0 \leq x \leq b$, então $P = \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{(b-x)^2+a^2} = \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{(x-b)^2+a^2} + b$

3) Se $x \leq 0$, então $P = \sqrt{|x|^2+a^2} + \sqrt{(b+|x|)^2+a^2} = \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{(x-b)^2+a^2} + b$

Portanto, devemos determinar (caso exista), o valor mínimo de

$$P(x) = \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{(x-b)^2+a^2} + b, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Temos: $P'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \dfrac{(x-b)}{\sqrt{(x-b)^2+a^2}} \neq 0$, se $x < 0$ ou $x > b$.

Se $0 \leq x \leq b$, então, tomando quadrados:

$$P'(x) = 0 \iff x^2((x-b)^2+a^2) = (x-b)^2(x^2+a^2) \iff$$

$$x^2(x-b)^2 + x^2 \cdot a^2 = (x-b)^2 x^2 + (x-b)^2 a^2 \iff$$

$$x^2 = (x-b)^2 \iff \boxed{x = b/2}$$

Como $P'(x)$ é contínua e $\lim_{x \to \pm\infty} P'(x) = \pm 2$, então:

$P'(x) < 0$ em $]-\infty, b/2[$ e $P'(x) > 0$ em $]b/2, +\infty[$.

Segue que $x_0 = b/2$ é o único ponto de mínimo global de P e o valor mínimo correspondente é $\boxed{P(b/2) = \sqrt{b^2+4a^2}+b}$.

b) $$\lim_{x\to 0} (1-\cos x)^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln(1-\cos x)}$$

e $$\lim_{x\to 0} x\ln(1-\cos x) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\cos x)}{(1/x)}.$$

Agora: i) $\lim_{x\to 0} \ln(1-\cos x) = \lim_{y\to 0+} \ln(y) = -\infty$

ii) $\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x\to 0-} \frac{1}{x} = -\infty$.

Por outro lado:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\ln(1-\cos x))'}{(1/x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{1-\cos x} \cdot x^2$$

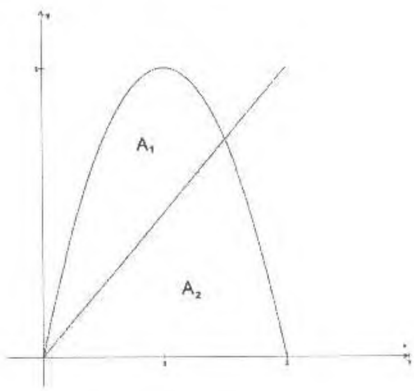
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x \cdot x^2 \cdot (1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{(-\operatorname{sen} x)}_{\to 0} \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^2}_{\to 1} \cdot \underbrace{(1+\cos x)}_{\to 2}$$

$= 0$.

Pela regra de L'Hospital, segue que $\lim_{x\to 0} x\ln(1-\cos x) = 0$ e, portanto

$$\boxed{\lim_{x\to 0} e^{x\ln(1-\cos x)} = 1}$$

3-) (a) (1,5 pontos) Seja $f(x) = -x^2 + 2x$ e considere a reta r de equação $y = cx$, $c > 0$. Determine o valor de c para o qual as áreas A_1 e A_2 mostradas na figura são iguais.



(b) (1,5 pontos) Seja $g(x) = e^{3x} + 8x - \text{sen}(\pi x)$. Mostre que g tem exatamente uma raiz real e localize-a entre dois inteiros consecutivos.

Resolução: (a) $-x^2 + 2x = cx \iff x(x-(2-c)) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2-c$. Pondo $x_0 = 2-c$, $0 < c < 2$, tem-se:

(i) $A_1 = \int_0^{x_0} [(-x^2+2x) - cx]\,dx \overset{TFC}{=} \left[-\frac{x^3}{3} + (2-c)\frac{x^2}{2}\right]_0^{2-c} =$

$= -\frac{(2-c)^3}{3} + \frac{(2-c)^3}{2} = \frac{(2-c)^3}{6}$

(ii) $A_1 + A_2 = \int_0^2 (-x^2+2x)\,dx \overset{TFC}{=} \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2}\right]_0^2 = -\frac{2^3}{3} + \frac{2^3}{2} = \frac{2^3}{6}$

$\therefore A_1 = A_2 \iff A_1 = \frac{A_1+A_2}{2} \iff \frac{(2-c)^3}{6} = \frac{1}{2}\frac{2^3}{6} \iff 2-c = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} \iff$

$\iff \boxed{c = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)}$ #

(b) g é derivável e $g': \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto 3e^{3x} + \overbrace{8 - \pi\cos(\pi x)}^{> 8-\pi > 0}$ $\therefore g' > 0$, donde, como corolário do TVM, g é estritamente crescente $\therefore$ injetiva. Assim g tem, no máximo, uma raiz. Como $g(0) = 1 > 0$ e $g(-1) = \frac{1}{e^3} - 8 \overset{e>2}{<} \frac{1}{2^3} - 8 < 0$, pelo teo. do valor intermediário g tem uma raiz em $]-1, 0[$.

Gabarito da Segunda Prova
MAT-2453 - Tipo B

17 de Maio de 2011

1-) Seja $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

(a) (0,8 pontos) Calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to-1^-} f(x)$.

(b) (0,7 pontos) Verifique que $f'(x) = \dfrac{(x+3)x^2}{(x+1)^3}$ e determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f.

(c) (1,0 ponto) Estude a concavidade de f.

(d) (1,0 ponto) Pesquise a existência de assíntotas em ∞ e $-\infty$; esboce o gráfico de f.

(a) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\left(1+\cancel{\frac{1}{x}}\right)^2} = +\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = -\infty;$$

Como $\lim_{x\to-1} x^3 = -1$, $\lim_{x\to-1} (x+1)^2 = 0$ e $(x+1)^2 > 0$ para todo $x \neq -1$,

temos que $\lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$. ($\Rightarrow$ a reta $x=-1$ é uma assíntota)

(b) $$f'(x) = \frac{3x^2(x+1)^2 - x^3\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(3x^3+3x^2-2x^3)(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{x^3+3x^2}{(x+1)^3} = \frac{(x+3)x^2}{(x+1)^3}$$

	-3		-1		0	
$x+3$	$-$		$+$		$+$	$+$
$x+1$	$-$		$-$		$+$	$+$
f'	$+$		$-$		$+$	$+$
f	↗		↘		↗	↗

f é estritamente crescente em $]-\infty,-3[$ e em $]-1,+\infty[$

f é estritamente decrescente em $]-3,-1[$

$x=-3$ é ponto de máximo local

$f(-3) = \dfrac{-27}{4}$.

(c) $$f''(x) = \frac{(3x^2+6x)(x+1)^3 - (x^3+3x^2)\cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{(x+1)^2(6x)}{(x+1)^6} = \frac{6x}{(x+1)^4}$$

		-1		0	
f''	$-$		$-$		$+$
f	$\frown$		$\frown$		$\smile$

f tem concavidade para cima em $]0,+\infty[$;

f tem concavidade para baixo em $]-\infty,-1[$ e em $]-1,0[$.

$x=0$ é ponto de inflexão; $f(0)=0$.

Para $x \to +\infty$:

(d) Vamos procurar uma assíntota da forma $y = mx + n$.

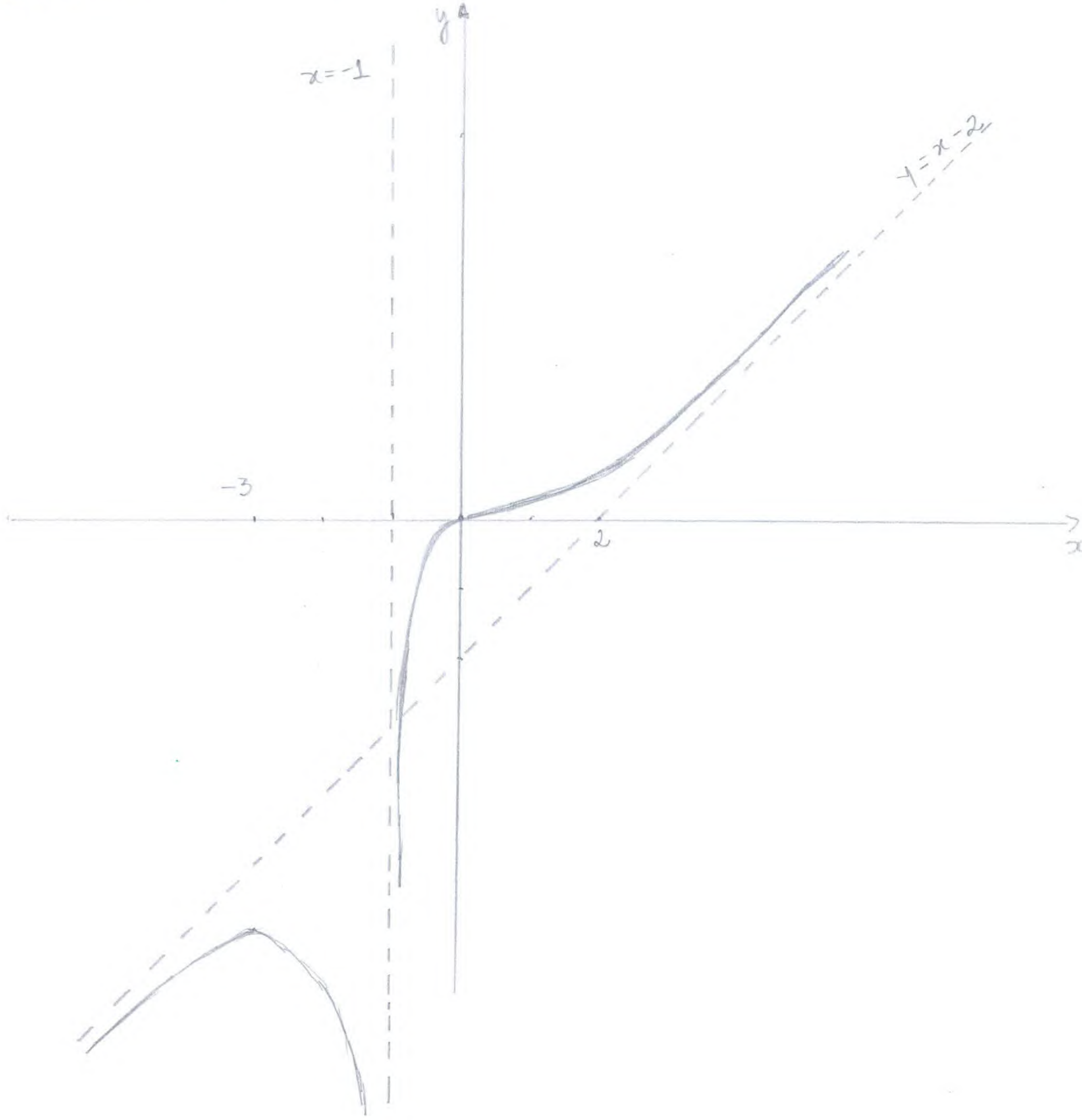
Sabemos que $$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^3}{(x+1)^2} - x\right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2 - x}{x^2 + 2x + 1} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(-2 - \frac{1}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = -2$$

Logo, a reta $y = x - 2$ é uma assíntota (em $+\infty$)

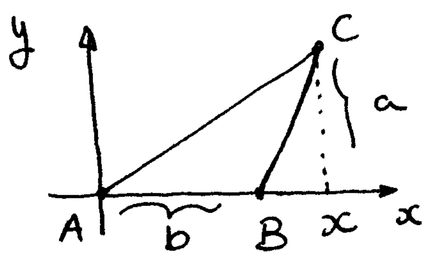
De modo análogo, verificamos que a mesma reta ($y = x - 2$) é assíntota em $-\infty$.



2-) (a) (2,5 pontos) Sejam $a, b > 0$. Determine, caso exista, o perímetro mínimo dos triângulos de base b e altura (relativa à base dada) a.

(b) (1,0 ponto) Calcule, caso exista, $\lim_{x \to 0} (1 - \cos x)^x$.

a) Seja ΔABC um triângulo de base $\overline{AB}$ com $AB = b$ e altura a. Introduzimos um sistema de coordenadas no plano com origem em A e B no semi-eixo positivo das abcissas. Podemos supor que o vértice C está no semiplano $y > 0$. Seja x a coordenada do pé da perpendicular à base, passando por C, conforme ilustrado abaixo:



Então o perímetro P é dado por $P = AB + AC + BC = AC + BC + b$.

Temos 3 situações a examinar

1) Se $x \geq b$, então $P = \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{(x-b)^2+a^2} + b$

2) Se $0 \leq x \leq b$, então $P = \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{(b-x)^2+a^2} = \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{(x-b)^2+a^2} + b$

3) Se $x \leq 0$, então $P = \sqrt{|x|^2+a^2} + \sqrt{(b+|x|)^2+a^2} = \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{(x-b)^2+a^2} + b$

Portanto, devemos determinar (caso exista), o valor mínimo de

$$P(x) = \sqrt{x^2+a^2} + \sqrt{(x-b)^2+a^2} + b, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Temos: $P'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \dfrac{(x-b)}{\sqrt{(x-b)^2+a^2}} \neq 0$, se $x < 0$ ou $x > b$.

Se $0 \leq x \leq b$, então, tomando quadrados:

$$P'(x) = 0 \iff x^2((x-b)^2+a^2) = (x-b)^2(x^2+a^2) \iff$$
$$x^2(x-b)^2 + x^2 \cdot a^2 = (x-b)^2 x^2 + (x-b)^2 a^2 \iff$$
$$x^2 = (x-b)^2 \iff \boxed{x = b/2}$$

Como $P'(x)$ é contínua e $\lim_{x\to\pm\infty} P'(x) = \pm 2$, então:

$P'(x) < 0$ em $]-\infty, b/2[$ e $P'(x) > 0$ em $]b/2, +\infty[$.

Segue que $x_0 = b/2$ é o único ponto de mínimo global de P e o valor mínimo correspondente é $\boxed{P(b/2) = \sqrt{b^2+4a^2}+b}$.

b) $\lim_{x\to 0} (1-\cos x)^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln(1-\cos x)}$

e $\lim_{x\to 0} x\ln(1-\cos x) = \lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-\cos x)}{(1/x)}$.

Agora: i) $\lim_{x\to 0} \ln(1-\cos x) = \lim_{y\to 0+} \ln(y) = -\infty$

ii) $\lim_{x\to 0+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x\to 0-} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

Por outro lado:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\ln(1-\cos x))'}{(1/x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{1-\cos x}\cdot x^2$$

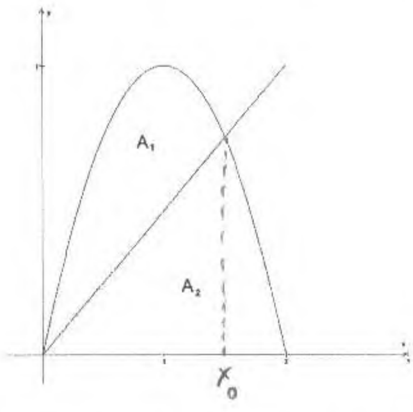
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x \cdot x^2 \cdot (1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \underbrace{(-\operatorname{sen} x)}_{\to 0}\cdot \underbrace{\left(\frac{x}{\operatorname{sen} x}\right)^2}_{\to 1}\cdot \underbrace{(1+\cos x)}_{\to 2}$$

$= 0$.

Pela regra de L'Hospital, segue que $\lim_{x\to 0} x\ln(1-\cos x) = 0$ e, portanto

$$\boxed{\lim_{x\to 0} e^{x\ln(1-\cos x)} = 1}$$

3-) (a) (1,5 pontos) Seja $f(x) = -x^2 + 3x$ e considere a reta r de equação $y = cx$, $c > 0$. Determine o valor de c para o qual as áreas A_1 e A_2 mostradas na figura são iguais.



(b) (1,5 pontos) Seja $g(x) = e^{2x} + 6x - \operatorname{sen}(\pi x)$. Mostre que g tem exatamente uma raiz real e localize-a entre dois inteiros consecutivos.

Resolução: (a) $-x^2+3x = cx \iff x(x-(3-c)) = 0 \iff$

$\iff x = 0$ ou $x = 3-c$. Pondo $x_0 = 3-c$, $0<c<3$, tem-se:

(i) $A_1 = \int_0^{x_0} [(-x^2+3x) - cx]\,dx \overset{TFC}{=} \left[-\frac{x^3}{3} + (3-c)\frac{x^2}{2}\right]_0^{3-c} =$

$= -\frac{(3-c)^3}{3} + \frac{(3-c)^3}{2} = \frac{(3-c)^3}{6}$

(ii) $A_1 + A_2 = \int_0^3 (-x^2+3x)\,dx \overset{TFC}{=} \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = -\frac{3^3}{3} + \frac{3^3}{2} = \frac{27}{6}$

$\therefore A_1 = A_2 \iff A_1 = \frac{A_1+A_2}{2} \iff \frac{(3-c)^3}{6} = \frac{1}{2}\frac{27}{6} \iff (3-c)^3 = \frac{27}{2} \iff$

$\iff 3-c = 3/\sqrt[3]{2} \iff \boxed{c = 3\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)}$ #

(b) g é derivável e $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2e^{2x} + \overbrace{6 - \pi\cos(\pi x)}^{\geq 6-\pi > 0}$ $\therefore g' > 0$, donde, como corolário do TVM, g é estritamente crescente $\therefore$ injetiva. Assim, g tem, no máximo, uma raiz. Como $g(0) = 1 > 0$ e $g(-1) = $
$= \frac{1}{e^2} - 6 \overset{e>2}{<} \frac{1}{2^2} - 6 < 0$, pelo teo. do valor intermediário g tem uma raiz em $]-1,0[$ #