(4,0) **Questão 1.** Dada a função $f(x) = x - 5\ln(x+2) - \dfrac{6}{x+2}$, determine:

a) o domínio, os limites pertinentes ao estudo (justifique os seus cálculos) e as assíntotas (caso existam e justifique se não existirem);

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > -2\}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - 5\ln(x+2) - \frac{6}{x+2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1 - \frac{5\ln(x+2)}{x}\right) - \frac{6}{x+2}\right)$

Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{5\ln(x+2)}{x} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{5}{x+2}}{1} = 0$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{x+2} = 0$, temos que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$ $\Rightarrow$ Não f não admite assíntota horizontal.

ii) $\displaystyle\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+}\left(x - 5\ln(x+2) - \frac{6}{x+2}\right) = \lim_{x\to-2^+}\left[x - \left(\frac{5(x+2)\ln(x+2)+6}{x+2}\right)\right]$

Como $\displaystyle\lim_{x\to-2^+}(x+2)\ln(x+2) = \lim_{x\to-2^+}\frac{\ln(x+2)}{\frac{1}{x+2}} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to-2^+}\frac{\frac{1}{x+2}}{-\frac{1}{(x+2)^2}} = \lim_{x\to-2^+} -(x+2) = 0$, temos que $\displaystyle\lim_{x\to-2^+}\left(\frac{5(x+2)\ln(x)+6}{x+2}\right) = +\infty$, assim $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty.}$ $\Rightarrow$ $x = -2$ é uma assíntota vertical.

iii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{5\ln(x+2)}{x} - \frac{6}{x(x+2)}\right) = 1 = m.$

Porém $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(f(x) - 1x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - 5\ln(x+2) - \frac{6}{x+2} - x\right) = -\infty$. Portanto, f não admite assíntota oblíqua.

b) os intervalos de crescimento e de decrescimento de f;

$f'(x) = 1 - \dfrac{5}{x+2} + \dfrac{6}{(x+2)^2} = \dfrac{(x+2)^2 - 5(x+2) + 6}{(x+2)^2} = \dfrac{x(x-1)}{(x+2)^2}$.

	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	f
$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	x
$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	$(x-1)$
$\vert$	$+$	$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	f'
-2		0		1		

$x = 0$ é um ponto de máximo local e $x = 1$ é um ponto de mínimo local de f.

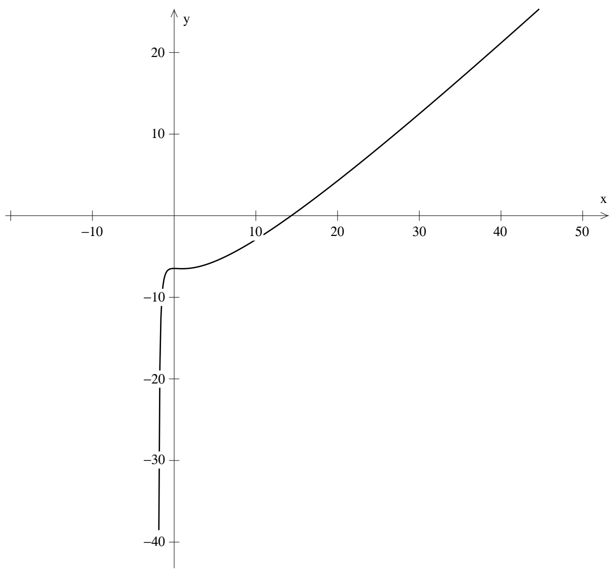
c) a concavidade e os pontos de inflexão de f ;

$$f''(x) = \frac{(2x-1)(x+2)^2 - (x^2-x)2(x+2)}{(x+2)^4} = \frac{5x-2}{(x+2)^3}.$$

	$\cap$		$\cup$	f
$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	$(5x-2)$
$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$(x+2)$
$\vert$	$-$	$\vert$	$+$	f'
-2		$\frac{2}{5}$		

$x = \dfrac{2}{5}$ é o único ponto de inflexão de f.

d) o esboço do gráfico de f.



Questão 2. (1,5) (I) Sejam a e b com $1 \leq a < b \leq \mathrm{e}$. Prove que $\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} \leq \frac{1}{a^2}(b-a)$.

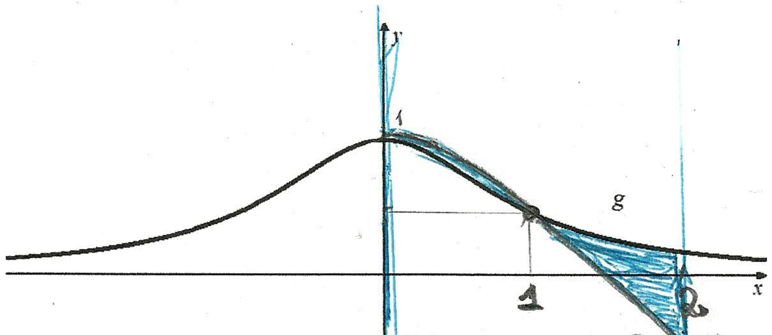
Seja $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. O domínio de f é o intervalo $]0, +\infty[$ e f é derivável em todo o seu domínio. Assim, para todo a, b com $0 < a < b$, f é contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Sejam então a e b com $1 \leq a < b \leq e$. Podemos aplicar o TVM. Temos que $\exists\, c \in]a,b[$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} = \frac{(1-\ln x)}{x^2}.$$ Logo $$\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} = \left(\frac{1-\ln c}{c^2}\right)(b-a).$$

Agora, $1 \leq a < c < b \leq e$, logo $1 < c < e \Rightarrow \ln 1 < \ln c < \ln e$ $\Rightarrow 0 > -\ln c > -1 \Rightarrow 1 > 1 - \ln c > 0$. Como $c > a \Rightarrow c^2 > a^2$ $\Rightarrow \frac{1}{c^2} < \frac{1}{a^2}$. Assim $\frac{1-\ln c}{c^2} < \frac{1}{a^2}$. Portanto $\frac{\ln b}{b} - \frac{\ln a}{a} < \frac{1}{a^2}(b-a)$.

(1,5) (II) Na figura abaixo está o gráfico de $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Seja $f(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$. Desenhe a região compreendida entre os gráficos de f e g e as retas $x = 0$ e $x = 2$. Calcule a sua área.



$$\frac{1}{1+x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{\cancel{1} - \cancel{1} - x^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2}}{1+x^2} = \frac{x^2}{2(1+x^2)}(x^2-1)$$

A área pedida é

$$A = \int_0^2 \left| \frac{1}{1+x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \right| dx$$

$$\left| \frac{1}{1+x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \right| = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{1+x^2} & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{x^2}{2} & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Logo $$A = \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{1+x^2}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$\overset{\text{TFC}}{=} \left(x - \frac{x^3}{6} - \operatorname{arc\,tg} x\right)\Big|_0^1 + \left(\operatorname{arctg} x - x + \frac{x^3}{6}\right)\Big|_1^2$$

$$= \cancel{1} - \frac{1}{6} - \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 \cancel{-2} + \frac{8}{6} - \operatorname{arctg} 1 + \cancel{1} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{6}{6} - 2\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 2 = \boxed{1 + \operatorname{arctg} 2 - \pi/2}$$

Questão 3. (1,0) **(I)** Calcule o seguinte limite: $\lim\limits_{x\to 1^-}(2-x)^{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}x)}$.

Resolução:

$$\lim_{x\to 1^-}(2-x)^{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}x)} = \lim_{x\to 1^-} e^{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}x)\ln(2-x)} = e^{\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\ln(2-x)}{\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2}x)}},$$

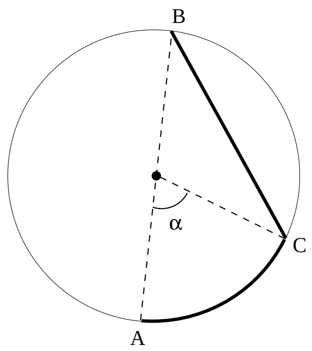
pois a Exponencial é uma função contínua. Note que $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{\ln(2-x)}{\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2}x)}$ é uma indeterminação da forma $\dfrac{0}{0}$, então aplicando a regra de L' Hospital obtemos que

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\ln(2-x)}{\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2}x)} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{2-x}\cdot(-1)}{-\operatorname{cossec}^2(\frac{\pi}{2}x)\cdot\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to 1^-}\frac{\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{2}x)}{2-x}\cdot\frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

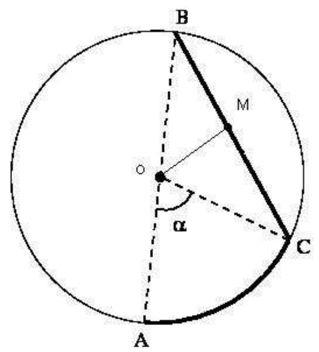
Logo, $\lim\limits_{x\to 1^-}(2-x)^{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}x)} = e^{\frac{2}{\pi}}$.

(2,0) **(II)** Para ir de um ponto A a um ponto B diametralmente oposto de uma piscina circular de 10m de diâmetro, uma pessoa pode caminhar (com velocidade constante) pela borda da piscina até um ponto C e nadar (com velocidade constante) em linha reta até o ponto B (veja a figura).

Sabendo que ela pode caminhar 2 vezes mais rápido do que pode nadar, determine, em termos de α, as trajetórias que o levam ao seu destino no maior e no menor tempo. (Obs.: Considere que ela pode somente caminhar ou somente nadar.)



Resolução:



A distância caminhando é dada por $d_1 = 5\alpha$, pois é o comprimento do arco AB. Como o triângulo OBC é isósceles, temos que medida$(\hat{B})$ =medida$(\hat{C}) = \dfrac{\alpha}{2}$ e que $BM = MC$, onde $\overline{OM}$ é altura. Logo a distância nadando é dada por $d_2 = 2\cdot 5\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

Se V é a velocidade nadando, então a velocidade caminhando é $2V$. Assim, o tempo total gasto em termos de α é

$$T(\alpha) = \frac{5\alpha}{2V} + \frac{2\cdot 5\cos\frac{\alpha}{2}}{V} = \frac{5}{V}\left(\frac{\alpha}{2} + 2\cos\frac{\alpha}{2}\right),\ \ \alpha\in[0,\pi].$$

Temos que $T'(\alpha) = \dfrac{5}{V}\left(\dfrac{1}{2} - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right)$. Então

$$T'(\alpha) > 0 \iff \frac{1}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} > 0 \iff \sin\frac{\alpha}{2} < \frac{1}{2} \iff 0 \leq \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{6} \iff 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{3}.$$

Analogamente, $T'(\alpha) < 0 \iff \dfrac{\pi}{3} < \alpha < \pi$.

Vemos então que T é estritamente crescente em $[0, \frac{\pi}{3}]$ e estritamente decrescente em $[\frac{\pi}{3}, \pi]$. Portanto, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ é ponto de máximo absoluto de T. O mínimo absoluto de T ocorre em uma das extreminades: Como $T(0) = \dfrac{10}{V}$ e $T(\pi) = \dfrac{5\pi}{2V}$ vemos que o menor tempo é quando $\alpha = \pi$, ou seja, quando a pessoa só caminha.