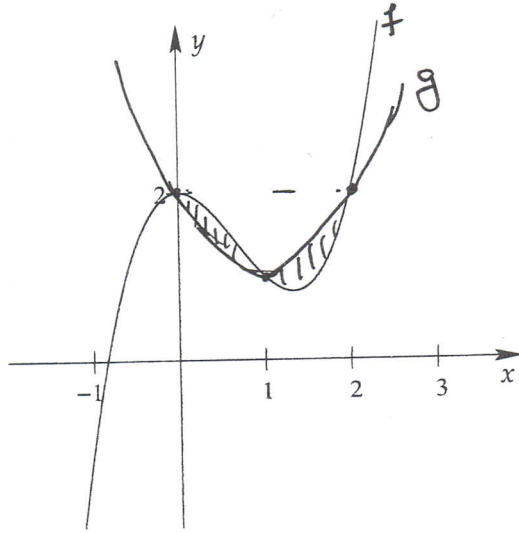


Questão 1 (Valor: 2.0 pontos). Dado o gráfico de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ abaixo, determine a área compreendida entre os gráficos de f e $g(x) = x^2 - 2x + 2$, para $0 \leq x \leq 2$.



$$f(x) - g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 1 \text{ ou } x = 2$$

O sinal de $f - g$ é dado por

$f - g$	-	+	-	+
---------	---	---	---	---

A área hachurada é $\int_0^1 [f(x) - g(x)] dx + \int_1^2 [g(x) - f(x)] dx$

$$= \int_0^1 [x^3 - 3x^2 + 2x] dx + \int_1^2 [-x^3 + 3x^2 - 2x] dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 \right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4} - 1 + 1 + (-4 + 8 - 4) - \left(-\frac{1}{4} + 1 - 1 \right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}}$$

Questão 2 (Valor: 1.5 pontos). Mostre que $\frac{\arctan(x)}{x} \leq 1$, para todo $x > 0$.

A função $f(x) = \arctan(x)$ é derivável (e portanto contínua) em \mathbb{R} .

Para cada $x > 0$ posso aplicar o T.V.M. para a função f no intervalo $[0, x]$ e obtenho:

$\exists \bar{x} \in]0, x[$ tal que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\bar{x})$$

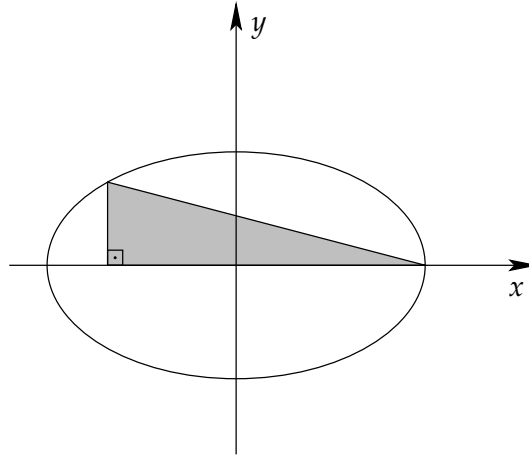
Como $f'(\bar{x}) = \frac{1}{1+(\bar{x})^2} < 1$, $\forall \bar{x}$, e $f(0) = 0$

sei que $\frac{f(x)}{x} < 1$, ou seja,

$$\frac{\arctan(x)}{x} < 1, \forall x > 0.$$

~~obs~~

Questão 3 (Valor: 2.5 pontos). Considere a elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ e todos os triângulos retângulos construídos com um dos vértices em $(5, 0)$, um sobre a elipse e o terceiro sobre o eixo Ox , como na figura abaixo. Justifique a existência, dentre esses triângulos, de um com área máxima e determine as medidas de sua base e sua altura.



Solução. Denotando por $(x, 0)$ as coordenadas do vértice móvel sobre o eixo Ox , temos que a base do triângulo mede $b = 5 - x$, com $-5 \leq x \leq 5$.

A altura h do triângulo é, para cada x descrita acima, o número $y \geq 0$ tal que $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, ou seja, $h = \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$.

Deste modo a área do triângulo, em termos de x , é dada por

$$A(x) = \frac{bh}{2} = \frac{3}{10}(5 - x)\sqrt{25 - x^2}, \text{ com } -5 \leq x \leq 5.$$

A função $A(x)$ atinge valor máximo e mínimo, pois é contínua e está definida num intervalo fechado. Os candidatos a ponto de máximo ou mínimo são os extremos do intervalo $[-5, 5]$ e os pontos críticos em seu interior, os quais são as soluções de $A'(x) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 = A'(x) &= \frac{3}{10} \left[-\sqrt{25 - x^2} - \frac{x(5 - x)}{\sqrt{25 - x^2}} \right] \\ &= \frac{3}{10} \left[\frac{2x^2 - 5x - 25}{\sqrt{25 - x^2}} \right]. \end{aligned}$$

Logo, $A'(x) = 0$, com $x \in] -5, 5[$ se e somente se $x = -\frac{5}{2}$. Para verificar que este ponto crítico é um ponto de máximo local podemos utilizar o teste da segunda derivada (muito trabalho!) ou analisar o sinal de $A'(x)$ numa vizinhança de $x = -\frac{5}{2}$ o que, neste caso, é bem mais simples:

- se $-5 < x < -\frac{5}{2}$ temos $A'(x) > 0$, e
- se $-\frac{5}{2} < x < 5$ temos $A'(x) < 0$.

Portanto $x = -\frac{5}{2}$ é máximo local, com $A\left(-\frac{5}{2}\right) = 45\frac{\sqrt{3}}{8}$. Como $A(-5) = A(5) = 0$, temos que $x = -\frac{5}{2}$ é máximo global.

Nesse caso as dimensões do triângulo são

$$b = \frac{15}{2} \quad \text{e} \quad h = 3\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(4,0) **Questão 4.** Esboce, no espaço abaixo, o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2}{x-1}e^{-\frac{1}{x}}$, determinando:

i) o domínio de f e limites pertinentes;

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = [-\infty \cdot 1] = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = [+ \infty \cdot 1] = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{x-1}{x^2}} \stackrel{\frac{0}{0}}{\parallel} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{-x+2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{-x+2}{x}} \stackrel{\frac{0}{0}}{\parallel} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{-2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{-2} = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = [0 \cdot 0] = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \left[-\infty \cdot \frac{1}{e}\right] = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \left[+\infty \cdot \frac{1}{e}\right] = +\infty$

ii) os intervalos de crescimento e decréscimo de f ;

$$f'(x) = \left(\frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} + \frac{x^2}{x^2(x-1)} \right) e^{-\frac{1}{x}} = \frac{x^2 - x - 1}{(x-1)^2} e^{-\frac{1}{x}}.$$

↗	↘	↘	↘	↗	f
+	-	-	-	+	$x^2 - x - 1$
+	-	-	-	+	f'
$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	0	1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$		

$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ é um ponto de máximo local e $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é um ponto de mínimo local de f .

Temos que $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) < -1$ e $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) > 2$.

iii) concavidades e pontos de inflexão, sabendo-se que $f''(x) = \frac{x^2 + 1}{(x-1)^3 x^2} e^{-\frac{1}{x}}$;

∩	∩	∪	f
-	-	+	$x - 1$
-	-	+	f'
0	1		

f não admite ponto de inflexão.

iv) assíntotas, se existirem.

a) Temos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{x^2 - x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = [1 \cdot 1] = 1 = m$.

e $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{-\frac{1}{x}} - x^2 + x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1 + \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}$

$\frac{0}{0}$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1 + \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{-1 + \frac{2}{x}} = 0 = n$.

Portanto, $y = 1x + 0$ é uma assíntota oblíqua (para $x \rightarrow +\infty$).

b) Analogamente, temos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{x^2 - x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = 1 = m$.

e $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 1x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} - x \right) = 0 = n$.

Portanto, $y = 1x + 0$ é uma assíntota oblíqua (para $x \rightarrow -\infty$).

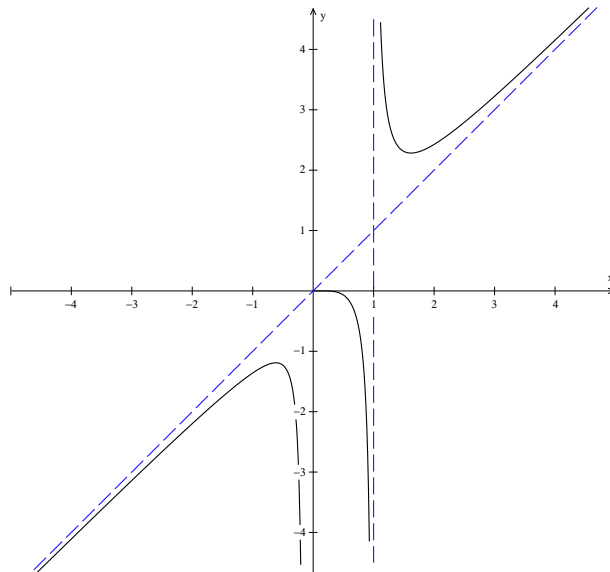
c) Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = -\infty$, então $x = 0$ é uma assíntota vertical.

d) Como $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = -\infty$, então $x = 1$ é uma assíntota vertical.

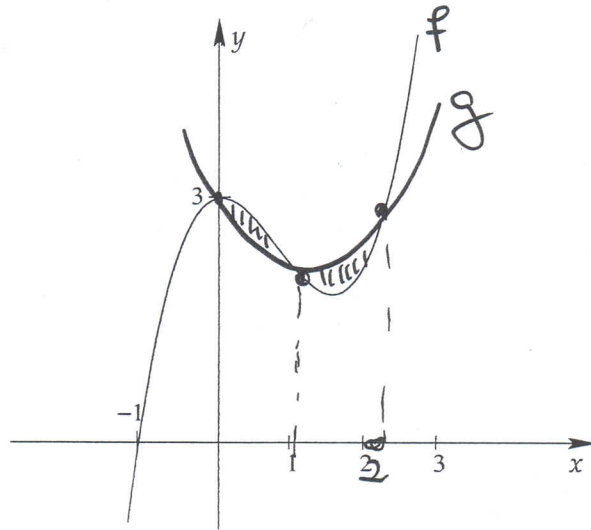
e) Como $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x-1} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$, então $x = 1$ é uma assíntota vertical.

f) Como existem assíntotas oblíquas, não existem assíntotas horizontais.

v) Portanto, o gráfico de f é:



Questão 1 (Valor: 2.0 pontos). Dado o gráfico de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ abaixo, determine a área compreendida entre os gráficos de f e $g(x) = x^2 - 2x + 3$, para $0 \leq x \leq 2$.



$$f(x) - g(x) = x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$$

O sinal de $f-g$ é dado por

0	↓	2
-	+	-
-	+	+

Logo, a área pedida é

$$\int_0^1 [f(x) - g(x)] dx + \int_1^2 [g(x) - f(x)] dx =$$

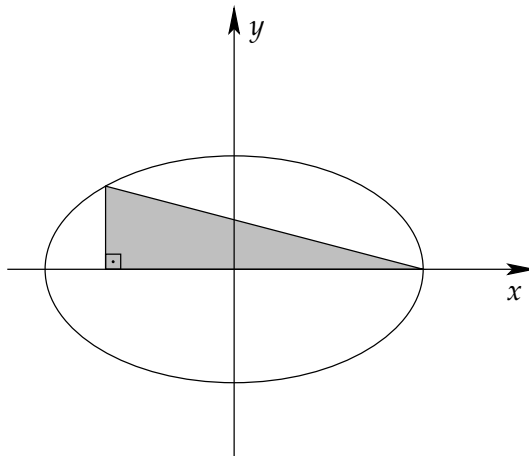
$$= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 \right]_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4} - 1 + 1 + (-4 + 8 - 4) - \left(-\frac{1}{4} + 1 - 1\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

Questão 3 (Valor: 2.5 pontos). Considere a elipse de equação $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ e todos os triângulos retângulos construídos com um dos vértices em $(4, 0)$, um sobre a elipse e o terceiro sobre o eixo Ox , como na figura abaixo. Justifique a existência, dentre esses triângulos, de um com área máxima e determine as medidas de sua base e sua altura.



Solução. Denotando por $(x, 0)$ as coordenadas do vértice móvel sobre o eixo Ox , temos que a base do triângulo mede $b = 4 - x$, com $-4 \leq x \leq 4$.

A altura h do triângulo é, para cada x descrito acima, o número $y \geq 0$ tal que $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, ou seja, $h = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}$.

Deste modo a área do triângulo, em termos de x , é dada por

$$A(x) = \frac{bh}{2} = \frac{3}{8}(4 - x)\sqrt{16 - x^2}, \text{ com } -4 \leq x \leq 4.$$

A função $A(x)$ atinge valor máximo e mínimo, pois é contínua e está definida num intervalo fechado. Os candidatos a ponto de máximo ou mínimo são os extremos do intervalo $[-4, 4]$ e os pontos críticos em seu interior, os quais são as soluções de $A'(x) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 = A'(x) &= \frac{3}{8} \left[-\sqrt{16 - x^2} - \frac{x(4 - x)}{\sqrt{16 - x^2}} \right] \\ &= \frac{3}{8} \left[\frac{2x^2 - 4x - 16}{\sqrt{16 - x^2}} \right]. \end{aligned}$$

Logo, $A'(x) = 0$, com $x \in] -4, 4[$ se e somente se $x = -2$. Para verificar que este ponto crítico é um ponto de máximo local podemos utilizar o teste da segunda derivada (muito trabalho!) ou analisar o sinal de $A'(x)$ numa vizinhança de $x = -2$ o que, neste caso, é bem mais simples:

- se $-4 < x < -2$ temos $A'(x) > 0$, e
- se $-2 < x < 4$ temos $A'(x) < 0$.

Portanto $x = -2$ é máximo local, com $A(-2) = 9\frac{\sqrt{3}}{2}$. Como $A(-4) = A(4) = 0$, temos que $x = -2$ é máximo global.

Nesse caso as dimensões do triângulo são

$$b = 6 \quad \text{e} \quad h = 3\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(4,0) **Questão 4.** Esboce, no espaço abaixo, o gráfico da função $f(x) = \frac{x^2}{x+1}e^{\frac{1}{x}}$, determinando:

i) o domínio de f e limites pertinentes;

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = [-\infty \cdot 1] = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = [+ \infty \cdot 1] = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = [0 \cdot 0] = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{x+1}{x^2}} \stackrel{\infty/\infty}{\underset{L'H}{\sim}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{x-2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{x+2}{x}} \stackrel{\infty/\infty}{\underset{L'H}{\sim}} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{2} = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \left[-\infty \cdot \frac{1}{e}\right] = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = \left[+\infty \cdot \frac{1}{e}\right] = +\infty$

ii) os intervalos de crescimento e decréscimo de f ;

$$f'(x) = \left(\frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} - \frac{x^2}{x^2(x+1)} \right) e^{\frac{1}{x}} = \frac{x^2 + x - 1}{(x+1)^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

↗	↘	↘	↘	↗	f
+	-	-	-	+	$x^2 + x - 1$
+	-	-	-	+	f'
$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	-1	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		

$x = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ é um ponto de máximo local e $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ é um ponto de mínimo local de f .

Temos que $f\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) < -2$ e $f\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) > 1$.

iii) concavidades e pontos de inflexão, sabendo-se que $f''(x) = \frac{x^2 + 1}{(x+1)^3 x^2} e^{\frac{1}{x}}$;

∩	∪	∪	f
-	+	+	$x + 1$
-	+	+	f'
-1	0		

f não admite ponto de inflexão.

iv) assíntotas, se existirem.

a) Temos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{x^2 + x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = [1 \cdot 1] = 1 = m.$

e $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$

$\frac{0}{0} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{1 + \frac{2}{x}} = 0 = n.$

Portanto, $y = 1x + 0$ é uma assíntota oblíqua (para $x \rightarrow +\infty$).

b) Analogamente, temos que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{x^2 + x} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 1 = m.$

e $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 1x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} - x \right) = 0 = n.$

Portanto, $y = 1x + 0$ é uma assíntota oblíqua (para $x \rightarrow -\infty$).

c) Como $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, então $x = 0$ é uma assíntota vertical.

d) Como $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = -\infty$, então $x = -1$ é uma assíntota vertical.

e) Como $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x+1} \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$, então $x = -1$ é uma assíntota vertical.

f) Como existem assíntotas oblíquas, não existem assíntotas horizontais.

v) Portanto, o gráfico de f é:

