(3,5) **Questão 1.**

a) Encontre o ponto de mínimo de $g(x) = 3x^2 + 1 - \ln x$ e conclua que $g(x) > 0$, para todo $x \in]0, +\infty[$;

b) Esboce o gráfico de $f(x) = 3x + \dfrac{\ln x}{x}$, determinando seu domínio, os intervalos de crescimento e de decrescimento de f, concavidades e assíntotas (caso existam).

a) $g'(x) = 6x - \frac{1}{x} = \frac{6x^2-1}{x}$ e $g'(x) = 0 \Rightarrow 6x^2 = 1 \overset{x>0}{\Longrightarrow} x = \frac{1}{\sqrt{6}}$

	0	$1/\sqrt{6}$	
g'		$-$	$+$
g		↘	↗

g é estritamente decrescente em $]0, 1/\sqrt{6}]$ e estritamente crescente em $[1/\sqrt{6}, +\infty[$. Logo, $x = 1/\sqrt{6}$ é ponto de mínimo global

Como $g\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \frac{3}{2} - \underbrace{\ln\frac{1}{\sqrt{6}}}_{<0} > 0$, temos que $g(x) > 0$, $\forall x > 0$.

b) $\operatorname{dom} f =]0, +\infty[$

<u>cresc./decresc.</u>: $f'(x) = 3 + \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{3x^2 + 1 - \ln x}{x^2} > 0$, pelo item a)

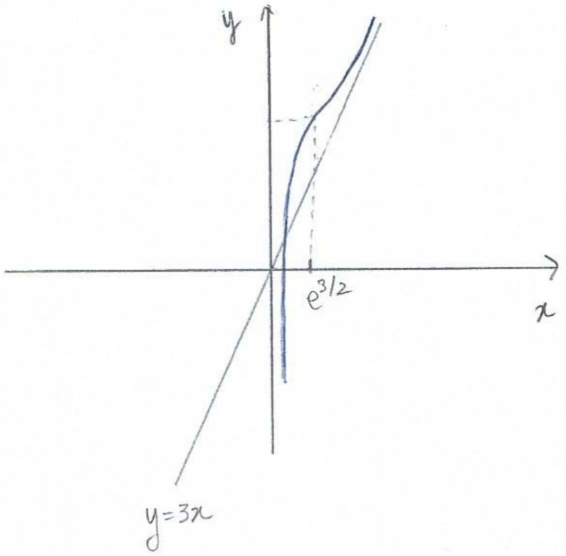
Portanto, f é estritamente crescente

<u>concavidade</u>: $f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - (1 - \ln x) \cdot 2x}{x^4} = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$

$f''(x) = 0$ se $x = e^{3/2}$

	0	$e^{3/2}$	
f''		$-$	$+$
f		$\cap$	$\cup$

$\left(e^{2/3}, 3e^{2/3} + \frac{2}{3e^{2/3}}\right)$ é ponto de inflexão



<u>assíntotas</u>:

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \overset{0}{3x} + \frac{\overset{-\infty}{\ln x}}{\underset{0^+}{x}} = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 3 + \frac{\ln x}{x^2} = 3 \ (= m)$

$\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \underset{L'H}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = 0\right)$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 3x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \underset{L'H}{\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

$y = 3x$ é assíntota para $x \to +\infty$

(1,5) **Questão 2.** Calcule, caso exista, o seguinte limite: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\dfrac{5\pi}{2} - 5x\right)^{\cos x}$.

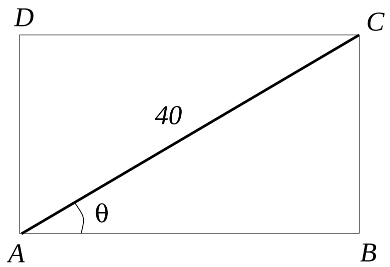
Temos que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{5\pi}{2} - 5x\right)^{\cos x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)^{\cos x}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \mathrm{e}^{\cos x \ln\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)} = (*)$

Como $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \cos x \ln\left(\frac{5\pi}{2} - 5x\right) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\ln\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)}{\frac{1}{\cos x}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\ln\left(\frac{5\pi}{2}-5x\right)}{\sec x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\frac{-5}{\frac{5\pi}{2}-5x}}{\sec x \,\mathrm{tg} x} =$

$= \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\frac{-1}{\frac{\pi}{2}-x}}{\frac{\mathrm{sen} x}{\cos^2 x}} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\cos^2 x}{(x-\frac{\pi}{2})\,\mathrm{sen} x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \dfrac{-2\cos x\,\mathrm{sen} x}{\mathrm{sen} x+(x-\frac{\pi}{2})\cos x} = 0.$

Portanto, $(*) = \mathrm{e}^0 = 1$.

(2,0) **Questão 3.** A superfície lateral de um cilindro circular reto é obtida unindo-se os lados AD e BC de um retângulo $ABCD$. Dentre todos os retângulos de diagonal $40cm$, determine o ângulo θ (ver figura) que permite construir um cilindro de volume máximo.



Sejam r o raio da base e h a altura do cilindro.

$m(\overline{AB}) = 40\cos\theta$ e $m(\overline{BC}) = 40\,\mathrm{sen}\theta$

$m(\overline{AB}) = 2\pi r = 40\cos\theta \Rightarrow r = \frac{40}{2\pi}\cos\theta$

$h = m(\overline{BC}) = 40\,\mathrm{sen}\theta$

$V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{40}{2\pi}\cos\theta\right)^2 40\,\mathrm{sen}\theta,\ \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$V(\theta) = \frac{40^3}{4\pi}\,\mathrm{sen}\theta\cos^2\theta$

$V'(\theta) = \frac{40^3}{4\pi}(\cos^3\theta - 2\,\mathrm{sen}^2\theta\cos\theta) \Rightarrow V'(\theta) = \frac{40^3}{4\pi}\cos\theta(\cos^2\theta - 2\,\mathrm{sen}^2\theta)$

$V'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0$ ou $1 - \mathrm{sen}^2\theta - 2\,\mathrm{sen}^2\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \mathrm{arcsen}(\frac{1}{\sqrt{3}})$

0		$\mathrm{arcsen}(\frac{1}{\sqrt{3}})$		$\frac{\pi}{2}$	
|	$+$	|	$-$	|	$1 - 3\,\mathrm{sen}^2\theta$
|	$+$	|	$-$	|	V'
	$\nearrow$		$\searrow$		V

Portanto, para se ter o volume máximo, temos que ter $\theta = \mathrm{arcsen}(\frac{1}{\sqrt{3}})$.

(3,5) **Questão 1.**

a) Encontre o ponto de mínimo de $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$ e conclua que $g(x) > 0$, para todo $x \in]0, +\infty[$;

b) Esboce o gráfico de $f(x) = 2x + \dfrac{\ln x}{x}$, determinando seu domínio, os intervalos de crescimento e de decrescimento de f, concavidades e assíntotas (caso existam).

a) $g'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2-1}{x}$ e $g'(x) = 0 \Rightarrow 4x^2 = 1 \overset{x>0}{\Longrightarrow} x = \frac{1}{2}$

	0	1/2
g'	$-$	$+$
g	$\searrow$	$\nearrow$

g é estritamente decrescente em $]0, 1/2]$ e estritamente crescente em $[1/2, +\infty[$. Logo, $x = \frac{1}{2}$ é ponto de mínimo global

Como $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} - \underbrace{\ln\frac{1}{2}}_{<0} > 0$, temos que $g(x) > 0$, $\forall x > 0$.

b) $\underline{\text{dom} f} =]0, +\infty[$

$\underline{\text{cresc./decresc}}$: $f'(x) = 2 + \frac{1-\ln x}{x^2} = \frac{2x^2+1-\ln x}{x^2} > 0$, pelo item a)

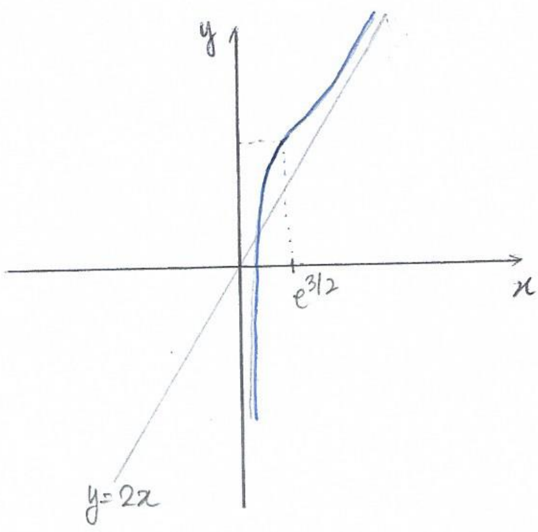
Portanto, f é estritamente crescente.

$\underline{\text{concavidade}}$: $f''(x) = \dfrac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - (1-\ln x)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$

$f''(x) = 0$ se $\ln x = 3/2$, isto é, $x = e^{3/2}$

	$e^{3/2}$	
f''	$-$	$+$
f	$\cap$	$\cup$

$\left(e^{3/2}, 2e^{3/2} + \frac{3/2}{e^{3/2}}\right)$ é ponto de inflexão



$\underline{\text{assíntotas}}$:

$\lim\limits_{x\to 0^+} \underbrace{2x}_{0} + \frac{\ln x}{x} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \frac{\ln x}{x^2} = 2\ (=m)$

$\left(\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = 0\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

$y = 2x$ é assíntota para $x \to +\infty$

(1,5) **Questão 2.** Calcule, caso exista, o seguinte limite: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left(\dfrac{3\pi}{2} - 3x\right)^{\cos x}$.

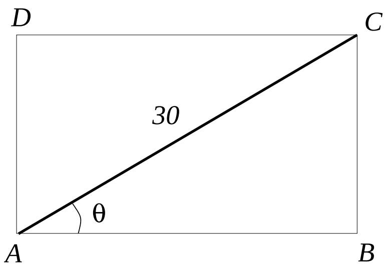
Temos que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)^{\cos x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \mathrm{e}^{\ln\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)^{\cos x}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \mathrm{e}^{\cos x \ln\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)} = (*)$

Como $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \cos x \ln\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\ln\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)}{\frac{1}{\cos x}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\ln\left(\frac{3\pi}{2} - 3x\right)}{\sec x} \underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\frac{-3}{\frac{3\pi}{2} - 3x}}{\sec x \operatorname{tg} x} =$

$= \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\frac{-1}{\frac{\pi}{2} - x}}{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{\cos^2 x}{(x - \frac{\pi}{2}) \operatorname{sen} x} \underset{L'H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{-2\cos x \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + (x - \frac{\pi}{2})\cos x} = 0.$

Portanto, $(*) = \mathrm{e}^0 = 1$.

(2,0) **Questão 3.** A superfície lateral de um cilindro circular reto é obtida unindo-se os lados AD e BC de um retângulo $ABCD$. Dentre todos os retângulos de diagonal $40cm$, determine o ângulo θ (ver figura) que permite construir um cilindro de volume máximo.



Sejam r o raio da base e h a altura do cilindro.

$m(\overline{AB}) = 30\cos\theta$ e $m(\overline{BC}) = 30\operatorname{sen}\theta$

$m(\overline{AB}) = 2\pi r = 30\cos\theta \Rightarrow r = \frac{30}{2\pi}\cos\theta$

$h = m(\overline{BC}) = 30\operatorname{sen}\theta$

$V = \pi r^2 h = \pi\left(\frac{30}{2\pi}\cos\theta\right)^2 30\operatorname{sen}\theta, \;\; 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$V(\theta) = \frac{30^3}{4\pi}\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta$

$V'(\theta) = \frac{30^3}{4\pi}(\cos^3\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta) \Rightarrow V'(\theta) = \frac{30^3}{4\pi}\cos\theta(\cos^2\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta)$

$V'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos\theta = 0$ ou $1 - \operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \operatorname{arcsen}(\frac{1}{\sqrt{3}})$

	$\nearrow$	$\searrow$	V
	$+$	$-$	$1 - 3\operatorname{sen}^2\theta$
	$+$	$-$	V'
0	$\operatorname{arcsen}(\frac{1}{\sqrt{3}})$	$\frac{\pi}{2}$	

Portanto, para se ter o volume máximo, temos que ter $\theta = \operatorname{arcsen}(\frac{1}{\sqrt{3}})$.