1. (Turma A)

$$a)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-\text{sen}(x^2)}{2x^3\text{sen}(\frac{1}{x})-5x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left[4-\frac{1}{x^2}\text{sen}(x^2)\right]}{x^2\left[2x\,\text{sen}(\frac{1}{x})-5\right]} = \lim_{x\to-\infty}\frac{4-\frac{1}{x^2}\text{sen}(x^2)}{2x\,\text{sen}(\frac{1}{x})-5} = -\frac{4}{3}$$

pois

- $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}\text{sen}(x^2)=0$ $\quad$ ($\text{sen}(x^2)$ é limitada e $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0$)
- $\lim_{x\to-\infty}x\,\text{sen}(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\text{sen}(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}=1$ $\quad$ (limite trigonométrico fundamental)

$$b)\ \lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x^2-3x}-\frac{\text{sen}(x^2-2x-3)}{x^2-6x+9}\right) = \lim_{x\to3}\left(\frac{1}{x(x-3)}-\frac{\text{sen}(x^2-2x-3)}{(x-3)^2}\frac{(x+1)}{(x+1)}\right)$$
$$= \lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{x}-\frac{\text{sen}(x^2-2x-3)}{x^2-2x-3}(x+1)\right)$$

O limite não existe porque

$$\lim_{x\to3^+}\frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{x}-\frac{\text{sen}(x^2-2x-3)}{x^2-2x-3}(x+1)\right)=-\infty$$
$$\lim_{x\to3^-}\frac{1}{x-3}\left(\frac{1}{x}-\frac{\text{sen}(x^2-2x-3)}{x^2-2x-3}(x+1)\right)=+\infty$$

pois

- $\lim_{x\to3}\frac{1}{x}-\frac{\text{sen}(x^2-2x-3)}{x^2-2x-3}(x+1)=\frac{1}{3}-1\cdot4=-\frac{11}{4}$ $\quad$ (trigonométrico de novo)
- $\lim_{x\to3^+}\frac{1}{x-3}=+\infty$ e $\lim_{x\to3^-}\frac{1}{x-3}=-\infty$

$$c)\ \lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[4]{x^4+1}) = \lim_{x\to+\infty}x(\sqrt[4]{(x^2+1)^2}-\sqrt[4]{x^4+1})$$
$$= \lim_{x\to+\infty}x\left(\frac{(x^2+1)^2-(x^4+1)}{(\sqrt[4]{(x^2+1)^6}+\sqrt[4]{(x^2+1)^4(x^4+1)}+\sqrt[4]{(x^2+1)^2(x^4+1)^2}+\sqrt[4]{(x^4+1)^3})}\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{(\sqrt[4]{(x^2+1)^6}+\sqrt[4]{(x^2+1)^4(x^4+1)}+\sqrt[4]{(x^2+1)^2(x^4+1)^2}+\sqrt[4]{(x^4+1)^3})}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^3\left(\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^2})^6}+\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^2})^4}\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^4})}+\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^2})^2}\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^4})^2}+\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^4})^3}\right)}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\left(\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^2})^6}+\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^2})^4}\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^4})}+\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^2})^2}\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^4})^2}+\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^4})^3}\right)}$$
$$= \frac{1}{2}$$

pois $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^4}=0$

2. (**3,0 pontos**) Seja

$$f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\,\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-4}).$$

Determine todos os pontos nos quais f é derivável e calcule a derivada de f nesses pontos. (**Observação:** Se você achar que a derivada de f não existe em algum ponto, justifique.)

(a) Se $x \neq 2$ e $x \neq -2$ então $(x-2)^2(x+2) \neq 0$ e $x^2-4 \neq 0$ e portanto as funções $\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}$ e $\sqrt[3]{x^2-4}$ são deriváveis (pela Regra da Cadeia). Assim, a função $\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})$ também é derivável e então f é derivável. Usando então a Regra do Produto e a Regra da Cadeia obtemos

$$f'(x) = \frac{1}{3}[(x-2)^2(x+2)]^{-\frac{2}{3}}(2(x-2)(x+2)+(x-2)^2)\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})$$

$$+\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\cos(\sqrt[3]{x^2-4})(\frac{1}{3}(x^2-4)^{-\frac{2}{3}})2x.$$

(b) Vamos agora verificar se f é ou não derivável em $x=2$. Para isso, vamos verificar se existe

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\,\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})}{x-2}.$$

Mas

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\,\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\,\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})\sqrt[3]{x^2-4}}{(x-2)\sqrt[3]{x^2-4}}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^3(x+2)^2}}{x-2}\frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})}{\sqrt[3]{x^2-4}} = \lim_{x\to 2}\sqrt[3]{(x+2)^2}\frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})}{\sqrt[3]{x^2-4}} = \sqrt[3]{4^2},$$

já que , fazendo $u = \sqrt[3]{x^2-4}$, temos que $x \to 2$ implica que $u \to 0$, e então

$$\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})}{\sqrt[3]{x^2-4}} = \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1.$$

Assim, f é derivável em $x=2$ e $f'(2) = \sqrt[3]{4^2}$.

(c) Vamos agora verificar se f é ou não derivável em $x=-2$.

$$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\,\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})}{x+2}$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\,\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})\sqrt[3]{x^2-4}}{(x+2)\sqrt[3]{x^2-4}} = \lim_{x\to -2}\sqrt[3]{\frac{(x-2)^3}{x+2}}\frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})}{\sqrt[3]{x^2-4}}.$$

Observe agora que se $x \to -2^+$ então $x+2>0$ e $x+2 \to 0$ e portanto

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty.$$

Logo

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{(x-2)^3}{x+2} = -\infty,$$

e já que

$$\lim_{x\to -2} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})}{\sqrt[3]{x^2-4}} = 1,$$

temos que

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})}{x+2} = \lim_{x\to -2^+} \sqrt[3]{\frac{(x-2)^3}{x+2}} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})}{\sqrt[3]{x^2-4}} = -\infty,$$

o que implica que f não é derivável em $x=-2$.

Conclusão: O conjunto dos pontos em que f é derivável é

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2\},$$

com

$$f'(x) = \frac{1}{3}[(x-2)^2(x+2)]^{-\frac{2}{3}}(2(x-2)(x+2)+(x-2)^2)\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-4})$$

$$+\sqrt[3]{(x-2)^2(x+2)}\cos(\sqrt[3]{x^2-4})(\frac{1}{3}(x^2-4)^{-\frac{2}{3}})2x,$$

se $x \neq 2$ e $x \neq -2$, e $f'(2) = \sqrt[3]{16}$.

3. **(1,5 ponto)** Determine $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ de modo que as retas tangentes ao gráfico de

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

sejam $y = 14x - 13$ no ponto $(1, 1)$ e $y = -2x - 5$ no ponto $(-1, -3)$.

Temos que

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Como a reta $y = 14x - 13$ tangencia o gráfico de f no ponto $(1, 1)$ temos que $f(1) = 1$ e $f'(1) = 14$, de onde obtemos as equações

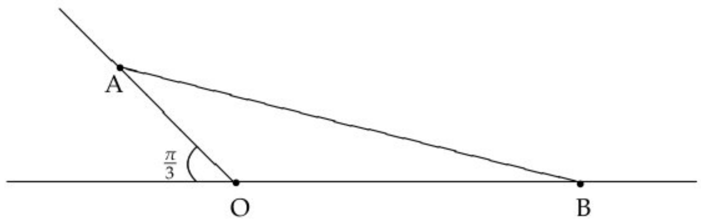
$$a + b + c + d = 1 \ \text{ e } \ 3a + 2b + c = 14$$

e, usando que a reta $y = -2x - 5$ tangencia o gráfico de f em $(-1, -3)$, vem que $f(-1) = -3$ e $f'(-1) = -2$, de onde obtemos as outras equações

$$-a + b - c + d = -3 \ \text{ e } \ 3a - 2b + c = -2.$$

Resolvendo o sistema, determinamos que $a = 2,\ b = 4,\ c = 0$ e $d = -5$.

4. (2,5 pontos) Uma barra, representada na figura pelo segmento AB, tem a extremidade A apoiada em uma plano inclinado e a extremidade B no chão conforme a figura. No instante t_0 a barra desliza de modo que o segmento AO mede 20cm e **diminui** a uma taxa de variação de 10cm/s. Sabendo que o segmento OB mede 40cm no instante t_0, determine a taxa de variação de OB neste instante.



Solução: Sejam x o comprimento de AO, y o de OB e L o de AB . Note que x e y variam com o tempo enquanto L é constante. Então, pela lei dos cossenos

$$L^2 = [x(t)]^2 + [y(t)]^2 - 2x(t).y(t)cos(\pi - \pi/3).$$

Como $cos(\pi - \pi/3) = -cos(\pi/3) = -1/2$ temos que

$$L^2 = [x(t)]^2 + [y(t)]^2 + x(t).y(t).$$

Derivando

$$0 = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) + x'(t).y(t) + x(t).y'(t).$$

Em t_0:

$$0 = 2 \cdot 20 \cdot (-10) + 2 \cdot 40 \cdot y'(t_0) + (-10) \cdot 40 + 20 \cdot y'(t_0)$$

Portanto $y'(t_0) = 8$cm/s .

1. (Turma B)

$$a)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2 - \text{sen}(x^2)}{3x^3\text{sen}(\frac{1}{x}) - 7x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2\left[5 - \frac{1}{x^2}\text{sen}(x^2)\right]}{x^2\left[3x\,\text{sen}(\frac{1}{x}) - 7\right]} = \lim_{x\to-\infty} \frac{5 - \frac{1}{x^2}\text{sen}(x^2)}{3x\,\text{sen}(\frac{1}{x}) - 7} = -\frac{5}{4}$$

pois

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2}\text{sen}(x^2) = 0$ (sen(x^2) é limitada e $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$)
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x\,\text{sen}(\frac{1}{x}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\text{sen}(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 1$ (limite trigonométrico fundamental)

$$b)\ \lim_{x\to2} \left(\frac{1}{x^2-2x} - \frac{\text{sen}(x^2-x-2)}{x^2-4x+4}\right) = \lim_{x\to2} \left(\frac{1}{x(x-2)} - \frac{\text{sen}(x^2-x-2)}{(x-2)^2}\frac{(x+1)}{(x+1)}\right)$$

$$= \lim_{x\to2} \frac{1}{x-2}\left(\frac{1}{x} - \frac{\text{sen}(x^2-x-2)}{x^2-x-2}(x+1)\right)$$

O limite não existe porque

$$\lim_{x\to2^+} \frac{1}{x-2}\left(\frac{1}{x} - \frac{\text{sen}(x^2-x-2)}{x^2-x-2}(x+1)\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^-} \frac{1}{x-2}\left(\frac{1}{x} - \frac{\text{sen}(x^2-x-2)}{x^2-x-2}(x+1)\right) = +\infty$$

pois

- $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{1}{x} - \frac{\text{sen}(x^2-x-2)}{x^2-x-2}(x+1) = \frac{1}{2} - 1\cdot 3 = -\frac{5}{2}$ (trigonométrico de novo)
- $\displaystyle\lim_{x\to2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$ e $\displaystyle\lim_{x\to2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$

$$c)\ \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt{x^2+1}) = -\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt[4]{(x^2+1)^2} - \sqrt[4]{x^4+1})$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{(x^2+1)^2 - (x^4+1)}{(\sqrt[4]{(x^2+1)^6} + \sqrt[4]{(x^2+1)^4(x^4+1)} + \sqrt[4]{(x^2+1)^2(x^4+1)^2} + \sqrt[4]{(x^4+1)^3})}\right)$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{(\sqrt[4]{(x^2+1)^6} + \sqrt[4]{(x^2+1)^4(x^4+1)} + \sqrt[4]{(x^2+1)^2(x^4+1)^2} + \sqrt[4]{(x^4+1)^3})}$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{x^3\left(\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^2})^6} + \sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^2})^4}\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^4})} + \sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^2})^2}\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^4})^2} + \sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^4})^3}\right)}$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\left(\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^2})^6} + \sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^2})^4}\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^4})} + \sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^2})^2}\sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^4})^2} + \sqrt[4]{(1+\frac{1}{x^4})^3}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

pois $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

2. (**3,0 pontos**) Seja

$$f(x) = \sqrt[3]{(x+3)^2(x-3)}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9}).$$

Determine todos os pontos nos quais f é derivável e calcule a derivada de f nesses pontos. (**Observação:** Se você achar que a derivada de f não existe em algum ponto, justifique.)

(a) Se $x \neq 3$ e $x \neq -3$ então $(x+3)^2(x-3) \neq 0$ e $x^2-9 \neq 0$ e portanto as funções $\sqrt[3]{(x+3)^2(x-3)}$ e $\sqrt[3]{x^2-9}$ são deriváveis (pela Regra da Cadeia). Assim, a função $\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})$ também é derivável e então f é derivável. Usando então a Regra do Produto e a Regra da Cadeia obtemos

$$f'(x) = \frac{1}{3}[(x+3)^2(x-3)]^{-\frac{2}{3}}(2(x+3)(x-3)+(x+3)^2)\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})$$

$$+\sqrt[3]{(x+3)^2(x-3)}\cos(\sqrt[3]{x^2-9})(\frac{1}{3}(x^2-9)^{-\frac{2}{3}})2x.$$

(b) Vamos agora verificar se f é ou não derivável em $x=-3$. Pra isso, vamos verificar se existe

$$\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3} = \lim_{x\to -3}\frac{\sqrt[3]{(x+3)^2(x-3)}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})}{x+3}.$$

Mas

$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt[3]{(x+3)^2(x-3)}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})}{x+3} = \lim_{x\to -3}\frac{\sqrt[3]{(x+3)^2(x-3)}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})\sqrt[3]{x^2-9}}{(x+3)\sqrt[3]{x^2-9}}$$

$$= \lim_{x\to -3}\frac{\sqrt[3]{(x+3)^3(x-3)^2}}{x+3}\frac{\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})}{\sqrt[3]{x^2-9}} = \lim_{x\to -3}\sqrt[3]{(x-3)^2}\frac{\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})}{\sqrt[3]{x^2-9}} = \sqrt[3]{(-6)^2},$$

já que , fazendo $u=\sqrt[3]{x^2-9}$, temos que $x\to -3$ implica que $u\to 0$, e então

$$\lim_{x\to -3}\frac{\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})}{\sqrt[3]{x^2-9}} = \lim_{u\to 0}\frac{\mathrm{sen} u}{u} = 1.$$

Assim, f é derivável em $x=-3$ e $f'(-3)=\sqrt[3]{6^2}$.

(c) Vamos agora verificar se f é ou não derivável em $x=3$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{(x+3)^2(x-3)}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2+9})}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{(x+3)^2(x-3)}\,\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})\sqrt[3]{x^2-9}}{(x-3)\sqrt[3]{x^2-9}} = \lim_{x\to 3}\sqrt[3]{\frac{(x+3)^3}{x-3}}\frac{\mathrm{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})}{\sqrt[3]{x^2-9}}.$$

Observe agora que se $x \to 3^+$ então $x-3>0$ e $x-3 \to 0$ e portanto

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty.$$

Logo

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{(x+3)^3}{x-3} = +\infty,$$

e já que

$$\lim_{x\to 3} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})}{\sqrt[3]{x^2-9}} = 1,$$

temos que

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt[3]{(x+3)^2(x-3)}\,\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \sqrt[3]{\frac{(x+3)^3}{x-3}}\frac{\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})}{\sqrt[3]{x^2-9}} = +\infty,$$

o que implica que f não é derivável em $x=3$.

Conclusão: O conjunto dos pontos em que f é derivável é

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\},$$

com

$$f'(x) = \frac{1}{3}[(x+3)^2(x-3)]^{-\frac{2}{3}}(2(x+3)(x-2)+(x+3)^2)\operatorname{sen}(\sqrt[3]{x^2-9})$$

$$+\sqrt[3]{(x+3)^2(x-3)}\cos(\sqrt[3]{x^2-9})(\frac{1}{3}(x^2-9)^{-\frac{2}{3}})2x,$$

se $x \neq 3$ e $x \neq -3$, e $f'(-3) = \sqrt[3]{36}$.

3. (**1,5 ponto**) Determine $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ de modo que as retas tangentes ao gráfico de

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

sejam $y = 13x - 9$ no ponto $(1, 4)$ e $y = 5x + 7$ no ponto $(-1, 2)$.

Temos que

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Como a reta $y = 13x - 9$ tangencia o gráfico de f no ponto $(1, 4)$ temos que $f(1) = 4$ e $f'(1) = 13$, de onde obtemos as equações

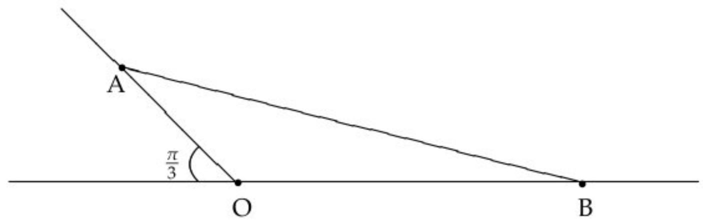
$$a + b + c + d = 4 \text{ e } 3a + 2b + c = 13$$

e, usando que a reta $y = 5x + 7$ tangencia o gráfico de f em $(-1, 2)$, vem que $f(-1) = 2$ e $f'(-1) = 5$, de onde obtemos as outras equações

$$-a + b - c + d = 2 \text{ e } 3a - 2b + c = 5.$$

Resolvendo o sistema, determinamos que $a = 4,\ b = 2,\ c = -3$ e $d = 1$.

4. (2,5 pontos) Uma barra, representada na figura pelo segmento AB, tem a extremidade A apoiada em uma plano inclinado e a extremidade B no chão conforme a figura. No instante t_0 a barra desliza de modo que o segmento AO mede 20cm e **diminui** a uma taxa de variação de 10cm/s. Sabendo que o segmento OB mede 40cm no instante t_0, determine a taxa de variação de OB neste instante.



Solução: Sejam x o comprimento de AO, y o de OB e L o de AB . Note que x e y variam com o tempo enquanto L é constante. Então, pela lei dos cossenos

$$L^2 = [x(t)]^2 + [y(t)]^2 - 2x(t).y(t)cos(\pi - \pi/3).$$

Como $cos(\pi - \pi/3) = -cos(\pi/3) = -1/2$ temos que

$$L^2 = [x(t)]^2 + [y(t)]^2 + x(t).y(t).$$

Derivando

$$0 = 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) + x'(t).y(t) + x(t).y'(t).$$

Em t_0:

$$0 = 2 \cdot 30 \cdot (-20) + 2 \cdot 40 \cdot y'(t_0) + (-10) \cdot 40 + 30 \cdot y'(t_0)$$

Portanto $y'(t_0) = \frac{200}{11}$cm/s .