Questão 1. Calcule o limite ou justifique porque não existe:

a) (1,0 ponto) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x+5\,\text{sen}\,x}{x\sqrt{x}\,\text{sen}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}$

b) (1,0 ponto) $\lim_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x^2-2x} - \dfrac{x+1}{x-2}\right)$

c) (1,0 ponto) $\lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{3x^6+2} - \sqrt{3x^6+2x^3-5}\right)$

a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x+5\,\text{sen}\,x}{x\sqrt{x}\,\text{sen}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2x}{x\sqrt{x}\,\text{sen}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)} + \dfrac{5\,\text{sen}\,x}{x\sqrt{x}\,\text{sen}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}$

$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{2}{\sqrt{x}\,\text{sen}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)} + \dfrac{1}{x}\,\text{sen}\,x \cdot \dfrac{5}{\sqrt{x}\,\text{sen}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)} = (*)$

Note que:

(i) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,\text{sen}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{3\,\text{sen}\left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{3}{\sqrt{x}}} = 3$ onde usamos o limite fundamental, uma vez que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x}} = 0$

(ii) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\,\text{sen}\,x = 0$ pelo corolário do Teorema do Confronto; pois $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ & $|\text{sen}\,x| \leq 1$ (limitado).

Logo,

$(*) = \dfrac{2}{3} + 0 \cdot \dfrac{5}{3} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$

b) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{(x^2-2x)} - \dfrac{x+1}{x-2}\right) = \lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1-x^2-x}{x(x-2)}\right)$

Note que:

(i) $\lim\limits_{x\to 2} 1-x^2-x = -5$ (negativo)

(ii) $\lim\limits_{x\to 2^-} x(x-2) = 0^-$ (tende para zero por valores negativos)

(iii) $\lim\limits_{x\to 2^+} x(x-2) = 0^+$ (Tende para zero por valores positivos)

logo,

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x^2-2x} - \frac{x+1}{x-2}\right) = +\infty\\ &\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{1}{x^2-2x} - \frac{x+1}{x-2}\right) = -\infty\end{aligned}\right\}$$

o limite não existe pois os limites laterais são diferentes

c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{3x^6+2} - \sqrt{3x^6+2x^3-5}\right)$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{\left(\sqrt{3x^6+2} - \sqrt{3x^6+2x^3-5}\right)\left(\sqrt{3x^6+2} + \sqrt{3x^6+2x^3-5}\right)}{\left(\sqrt{3x^6+2} + \sqrt{3x^6+2x^3-5}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{3x^6+2-3x^6-2x^3+5}{\sqrt{3x^6+2} + \sqrt{3x^6+2x^3-5}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3\left(-2+7/x^3\right)}{|x^3|\left(\sqrt{3+2/x^6} + \sqrt{3+2/x^3-5/x^6}\right)} =$$

Note que

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{|x^3|} = -1\\ &\lim_{x\to -\infty} \frac{c}{x^n} = 0, \quad n \geq 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow * = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Questão 2. (3,5 pontos) Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x^2-3x}\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right)}{3+\operatorname{arctg} x}, & \text{se } x \neq 3 \\ 1, & \text{se } x = 3 \end{cases}$

a) Determine todos os pontos em que f não é contínua. Justifique.

b) Determine todos os pontos em que f não é derivável. Justifique.

c) Calcule a derivada de f nos pontos em que f é derivável.

a) Se $x \neq 3$, f é contínua (quociente, produto e composta de funções contínuas é contínua.

Para $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \underbrace{\underbrace{\sqrt[3]{x^2-3x}}_{0} \cdot \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right)}_{\text{limitada}}}_{\to 0} \ \underbrace{\frac{1}{3+\operatorname{arctg} x}}_{\to \frac{1}{3+\operatorname{arctg} 3}} = 0 \neq f(3).$$

Logo, f não é contínua para $x = 3$

b) Se $x \neq 0$ e $x \neq 3$, f é derivável (quociente, produto e composta de funções deriváveis)

Em $x=3$ f não é derivável pois f não é contínua

Em $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x(x-3)}\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right)}{x\,(3+\operatorname{arctg} x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{\sqrt[3]{x-3}}^{\sqrt[3]{-3}}}{\underbrace{\sqrt[3]{x^2}}_{\to 0 (>0)}} \ \frac{\overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right)}^{\operatorname{sen}\left(-\frac{1}{3}\right)}}{\underbrace{(3+\operatorname{arctg} x)}_{\to 3}} = +\infty$$

Logo, f não é derivável em $x = 0$ e em $x = 3$.

c) Se $x \neq 0$ e $x = 3$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2x-3}{3\sqrt[3]{(x^2-3x)^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right) + \sqrt[3]{x^2-3x}\ \cos\left(\frac{1}{x-3}\right)\left(-\frac{1}{(x-3)^2}\right)\right)(3+\operatorname{arctg} x) - \sqrt[3]{x^2-3x}\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right)\cdot \frac{1}{1+x^2}}{(3+\operatorname{arctg} x)^2}$$

Questão 3. (2,0 pontos) Sejam $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, em que $a, b, c \in \mathbb{R}$, e $g(x) = 5 - 3 \operatorname{sen} x$. Determine a, b e c sabendo que f e g possuem mesma reta tangente no ponto de abscissa 0 e que o ponto $(0, -3)$ pertence à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2.

Como f e g possuem mesma reta tangente no ponto de abscissa 0,

temos que $f(0) = g(0)$ e $f'(0) = g'(0)$.

Mas $g(0) = 5$ e $f(0) = c$. Logo, $c = 5$.

$g'(x) = -3\cos x$ e, portanto, $g'(0) = -3$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ e, portanto, $f'(0) = b$

Temos então que $b = -3$ e $f(x) = x^3 + ax^2 - 3x + 5$.

Daí, a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2

tem equação $y - f(2) = f'(2)(x-2)$, ou seja,

$$y - (a \cdot 4 + 7) = (9 + 4a)(x-2).$$

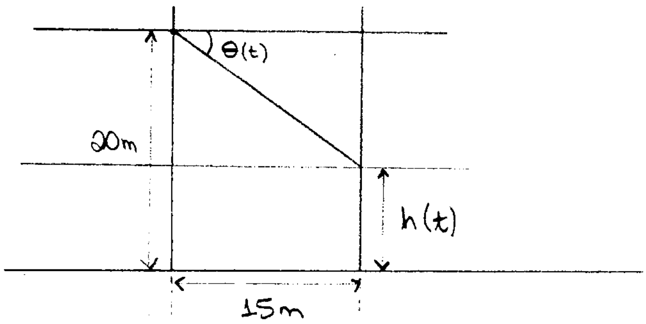
Como o ponto $(0,-3)$ pertence a esta reta, temos que

$$-3 - (4a + 7) = (9 + 4a) \cdot (-2)$$

donde segue que $a = -2$.

Temos portanto que $a = -2$, $b = -3$ e $c = 5$.

Questão 4. (1,5 ponto) Da janela de um prédio, a 20 metros do solo, um menino brinca com uma ponteira laser, movendo-a verticalmente e iluminando a parede do prédio vizinho, situado a uma distância de 15 metros. Num determinado instante, o ponto de luz está a uma altura de 11 metros e a velocidade com que ele sobe é de 10 metros por segundo. Determine a taxa de variação do ângulo formado entre a horizontal e o feixe de luz nesse instante.



Seja $h(t)$ a distância do ponto de luz ao solo no instante t e $\theta(t)$ o ângulo formado entre a horizontal e o feixe de luz no instante t.

Sabemos que $h(t_0) = 11m$ e $h'(t_0) = 10 m/s$

Observe que $tg(\theta(t)) = \dfrac{20 - h(t)}{15}$.

Daí, derivando, temos que $sec^2(\theta(t)) \cdot \theta'(t) = -\dfrac{h'(t)}{15}$. $(*)$

Além disso, $sec^2(\theta(t_0)) = 1 + tg^2(\theta(t_0)) = 1 + \left(\dfrac{20-11}{15}\right)^2 = \dfrac{34}{25}$.

Então, $(*)$ em t_0 fica $\dfrac{34}{25}\,\theta'(t_0) = \dfrac{-10}{15}$.

Assim, $\theta'(t_0) = -\dfrac{25}{51}$ rad/s

Questão 1. Calcule o limite ou justifique porque não existe:

a) (1,0 ponto) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x + 4\,\mathrm{sen}\, x}{x\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}$

b) (1,0 ponto) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{1}{x^2-3x} - \dfrac{x+1}{x-3}\right)$

c) (1,0 ponto) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{4x^6+2} - \sqrt{4x^6+3x^3-5}\right)$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+4\,\mathrm{sen}\,x}{x\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{x\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} + \dfrac{4\,\mathrm{sen}\,x}{x\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} + \left(\dfrac{1}{x}\,\mathrm{sen}\,x\right)\left(\dfrac{4}{\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}\right) = (*)$

Note que:

(i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)} = 2$ onde foi utilizado o limite fundamenta, uma vez que $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) = 0$

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{sen}\,x = 0$ pelo corolário do Teorema do Confronto, pois $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ & $|\mathrm{sen}\,x| \leq 1$ (limitado)

(iii) Usando (i) & (ii) obtemos

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x}\,\mathrm{sen}\,x\right)\left(\dfrac{4}{\sqrt{x}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)}\right) = 0 \cdot 2 = 0$

$\Rightarrow (*) = \dfrac{3}{2} + 0 = \boxed{\dfrac{3}{2}}$

b) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{1}{x^2-3x} - \dfrac{x+1}{x-3} \right) = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{1-x^2-x}{x(x-3)}$

Note que

$\lim\limits_{x\to 3} 1-x^2-x = -11$ (negativo)

$\lim\limits_{x\to 3^+} x(x-3) = 0^+$ (tende à zero por valores positivos)

$\lim\limits_{x\to 3^-} x(x-3) = 0^-$ (tende à zero por valores negativos)

Logo,

$\lim\limits_{x\to 3^+} \left(\dfrac{1}{x^2-3x} - \dfrac{x+1}{x-3} \right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 3^-} \left(\dfrac{1}{x^2-3x} - \dfrac{x+1}{x-3} \right) = +\infty$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{O limite não existe pois os limites laterais são diferentes}}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\sqrt{4x+2} - \sqrt{4x^6+3x^3-5} \right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{(\sqrt{4x^6+2} - \sqrt{4x^6+3x^3-5})(\sqrt{4x^6+2}+\sqrt{4x^6+3x}}{(\sqrt{4x^6+2}+\sqrt{4x^6+3}}$

$= \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4x^6+2-\cancel{4x^6}-3x^3+5}{\sqrt{4x^6+2}+\sqrt{4x^6+3x^3-5}} = \dfrac{x^3(-3+7/x^3)}{|x^3|\left(\sqrt{4+2/x^6}+\sqrt{4+3/x^3-5/x^6}\right)} = ⊛$

Note que:

(i) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3}{|x^3|} = -1$

(ii) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{c}{x^n} = 0 \quad (n \geq 1)$

$\Rightarrow$ $\boxed{⊛ = \dfrac{3}{4}}$

Questão 2. (3,5 pontos) Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x^2-2x}\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)}{4+\operatorname{arctg} x}, & \text{se } x \neq 2 \\ 1, & \text{se } x = 2 \end{cases}$

a) Determine todos os pontos em que f não é contínua. Justifique.

b) Determine todos os pontos em que f não é derivável. Justifique.

c) Calcule a derivada de f nos pontos em que f é derivável.

a) Se $x \neq 2$, f é contínua (quociente, produto e composta de funções contínuas é contínua)

Para $x=2$:

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{\overbrace{\underbrace{\sqrt[3]{x^2-2x}}_{\to 0}\ \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)}_{\text{limitado}}}^{\to 0}}{\underbrace{4+\operatorname{arctg} x}_{\to 4+\operatorname{arctg} 2}} = 0 \neq f(2).$$ Logo, f não é contínua em $x=2$.

b) Se $x \neq 0$ e $x \neq 2$, f é derivável (quociente, produto e composta de funções deriváveis

Em $x=2$, f não é derivável pois f não é contínua

Em $x=0$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\underbrace{\sqrt[3]{x-2}}_{\to \sqrt[3]{-2}}\ \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)}_{\to \operatorname{sen}\left(-\frac{1}{2}\right)}}{\underbrace{\sqrt[3]{x^2}}_{\to 0\,(>0)}\ \underbrace{(4+\operatorname{arctg} x)}_{\to 4}} = +\infty$$

Logo, f não é derivável em $x=0$ e em $x=2$

c) Se $x \neq 0$ e $x \neq 2$:

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2x-2}{3\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right) + \sqrt[3]{x^2-2x}\cos\left(\frac{1}{x-2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right)\right)(4+\operatorname{arctg} x) - \sqrt[3]{x^2-2x}\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)\cdot\frac{1}{1+x^2}}{(4+\operatorname{arctg} x)^2}$$

Questão 3. (2,0 pontos) Sejam $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, em que $a, b, c \in I\!R$, e $g(x) = 7 - 5\,\mathrm{sen}\,x$. Determine a, b e c sabendo que f e g possuem mesma reta tangente no ponto de abscissa 0 e que o ponto $(0, -1)$ pertence à reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2.

Como f e g possuem mesma reta tangente no ponto de abscissa 0,

temos que $f(0) = g(0)$ e $f'(0) = g'(0)$.

Mas $g(0) = 7$ e $f(0) = c$. Logo, $c = 7$

$g'(x) = -5\cos x$ e, portanto, $g'(0) = -5$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$ e, portanto, $f'(0) = b$

Temos então que $b = -5$ e $f(x) = x^3 + ax^2 - 5x + 7$.

Daí, a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2

tem equação $y - f(2) = f'(2)(x-2)$, ou seja,

$$y - (4a+5) = (4a+7)(x-2)$$

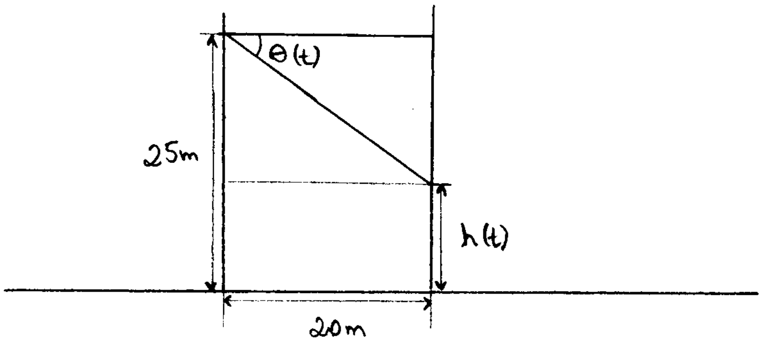
Como o ponto $(0,-1)$ pertence a essa reta, temos que

$$-1 - (4a+5) = (4a+7)\cdot(-2)$$

donde segue que $a = -2$.

Temos portanto que $a = -2$, $b = -5$ e $c = 7$.

Questão 4. (1,5 ponto) Da janela de um prédio, a 25 metros do solo, um menino brinca com uma ponteira laser, movendo-a verticalmente e iluminando a parede do prédio vizinho, situado a uma distância de 20 metros. Num determinado instante, o ponto de luz está a uma altura de 10 metros e a velocidade com que ele sobe é de 16 metros por segundo. Determine a taxa de variação do ângulo formado entre a horizontal e o feixe de luz nesse instante.



Seja $h(t)$ a distância do ponto de luz ao solo no instante t e $\theta(t)$ o ângulo formado entre a horizontal e o feixe de luz no instante t.

Sabemos que $h(t_0) = 10m$ e $h'(t_0) = 16 m/s$.

Observe que $tg(\theta(t)) = \dfrac{25 - h(t)}{20}$.

Daí, derivando, obtemos que $\sec^2(\theta(t)) \cdot \theta'(t) = \dfrac{-h'(t)}{20}$ $(*)$

Além disso, $\sec^2(\theta(t_0)) = 1 + tg^2(\theta(t_0)) = 1 + \left(\dfrac{25-10}{20}\right)^2 = \dfrac{25}{16}$.

Então, $(*)$ em t_0 fica $\dfrac{25}{16}\theta'(t_0) = -\dfrac{16}{20}$.

Assim, $\theta'(t_0) = -\dfrac{64}{125}$ rad/s.