1. (3,0) Calcule os seguintes limites, caso existam. **Justifique!**

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 \cos x + x^5 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{2x^4+5x^2+4}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{5-x^2}-1}{\sqrt{x^3-4x^2+4x}}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2}-x)$

$$\text{(a)} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\cos x + x^5 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{2x^4+5x^2+4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\underbrace{\frac{\cos x}{x}}_{\to 0} + \underbrace{x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 1}}{2+\underbrace{\frac{5}{x^2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{4}{x^4}}_{\to 0}} = \frac{1}{2}$$

Justificativa

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos x \cdot \frac{1}{x} = 0$ pois $|\cos x| \leq 1$ para todo x

e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$ pois

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ e $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$

$$\text{(b)} \lim_{x\to 2^-} \frac{\sqrt{5-x^2}-1}{\sqrt{x^3-4x^2+4x}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{5-x^2-1}{\left(\sqrt{5-x^2}+1\right)\sqrt{x^3-4x^2+4x}} =$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(2+x)(2-x)}{\left(\sqrt{5-x^2}+1\right)\sqrt{x(x-2)^2}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(2+x)(2-x)}{\left(\sqrt{5-x^2}+1\right)|x-2|\sqrt{x}} \overset{(*)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{2+x}{\left(\sqrt{5-x^2}+1\right)\sqrt{x}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(*) Para $x < 2$, temos $|x-2| = 2-x$

(c)

$$\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)\left[\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2}-x^2\right]=x^3+x^2-x^3=x^2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+x^2}+x^2}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{\left(x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2+x\cdot x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{3}$$

2. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\frac{1}{x}) \left[\frac{\cos(3x^2)-1}{x^2}\right] & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

(a) (1,5) A função f é derivável em $x = 0$? **JUSTIFIQUE!**

(b) (1,5) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$.

a) Para verificar se f é derivável em $x=0$, precisamos saber se existe $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{\cos(3x^2)-1}{x^3}\right)$

Note que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x^2)-1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x^2)-1}{x^3} \cdot \frac{\cos(3x^2)+1}{\cos(3x^2)+1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}^2(3x^2)}{x^3} \cdot \frac{1}{\cos(3x^2)+1} = \lim_{x\to 0} -9x \frac{\operatorname{sen}^2(3x^2)}{9x^4} \cdot \frac{1}{\cos(3x^2)+1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{-9x}_{0} \cdot \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{3x^2}\right)^2}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\underbrace{\cos(3x^2)}_{1}+1}}_{1/2} = 0$$

$\left[\text{Obs: } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x^2)}{3x^2} = \right.$ $(u = 3x^2 \quad x\to 0 \Rightarrow u \to 0)$ $\left. = \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1\right]$

Como $g(x) = \operatorname{arctg}(\frac{1}{x})$ é uma função limitada (pois $-\pi/2 < \operatorname{arctg}\frac{1}{x} < \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$), por uma consequência do Teorema do Confronto, temos que:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}(1/x) \cdot \overbrace{\left(\frac{\cos(3x^2-1}{x^2}\right)}^{\lim \to 0} = 0.$$

Logo f é derivável em $x=0$ e $f'(0) = 0$.

b) $f'(x) = \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{\cos(3x^2)-1}{x^2}\right) + \operatorname{arctg}(1/x) \cdot g'(x)$, onde

$$g'(x) = \left(\frac{\cos(3x^2)-1}{x^2}\right)' = \frac{-\operatorname{sen}(3x^2) \cdot 6x \cdot x^2 - 2x(\cos(3x^2)-1)}{x^4} =$$

$$= \frac{-6x^3 \operatorname{sen}(3x^2) - 2x(\cos(3x^2)-1)}{x^4}$$

3. (1,5) Determine a reta que é tangente ao gráfico de

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

e passa pelo ponto $(1,1)$.

Note que o domínio de f, $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$ e para todo $x_0 \in D_f$, f é derivável em x_0.

A reta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$ tem equação

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

No caso, $f'(x) = \dfrac{2(x-1) - (2x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = \dfrac{-3}{(x-1)^2}$.

A equação da reta é então

$$y - \left(\frac{2x_0+1}{x_0-1}\right) = \frac{-3}{(x_0-1)^2}(x - x_0).$$

Queremos que essa reta passe por $(1,1)$.

Então $1 - \left(\dfrac{2x_0+1}{x_0-1}\right) = \dfrac{-3(\cancel{1-x_0})}{(x_0-1)^{\cancel{2}}}$. Logo

Logo: $x_0 - 1 - 2x_0 - 1 = 3$ e $-x_0 = 5$

$$\Rightarrow \boxed{x_0 = -5}$$

$f(x_0) = -\dfrac{10+1}{-5-1} = \dfrac{-9}{-6} = \dfrac{3}{2}$ $\qquad f'(x_0) = \dfrac{-3}{36} = -\dfrac{1}{12}$

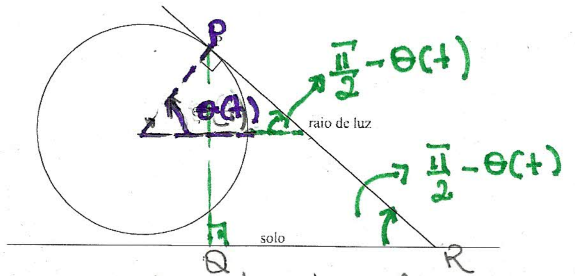
Portanto a equação da reta é

$$\boxed{y - \frac{3}{2} = -\frac{1}{12}(x+5)}$$

4. (2,5) Uma roda gigante tem 10m de raio e seu centro está a 11m do solo. Ela gira no sentido anti-horário. Seja P um ponto fixado nessa roda. No instante t_0 em que P está a 16m do solo, a distância de P ao solo varia a uma taxa de 30m/min.

   (a) A que taxa a roda está girando no instante t_0? (Ou seja, qual é a taxa de variação de θ em relação ao tempo no instante t_0?)

   (b) Do ponto P parte um raio de luz que tangencia a circunferência e ilumina um ponto no solo (veja a figura). Qual é a taxa de variação da distância do ponto P ao ponto que ele ilumina no solo no instante t_0?



(a) Sejam $\theta(t)$ o ângulo da figura no instante t e $y(t)$ a distância de P ao solo no instante t. Sabemos que $y(t_0) = 16m$ e que $y'(t_0) = 30\ m/min$.

Observe que $\boxed{y(t) = 11 + 10\,\text{sen}\,\theta(t)}$ (*). Assim

$y'(t) = 10\cos\theta(t)\,\theta'(t)$. Em t_0:

$y'(t_0) = 10\cos\theta(t_0)\,\theta'(t_0)$.

Voltando em (*) temos que $y(t_0) = 11 + 10\,\text{sen}\,\theta(t_0) \Rightarrow$

$\text{sen}\,\theta(t_0) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\theta(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Assim

$30 = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{2}\theta'(t_0) \Rightarrow \boxed{\theta'(t_0) = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\ rd/min}$

(b) Seja $d(t)$ a distância de P ao ponto que ele ilumina no solo no instante t.

Temos que $Q\hat{R}P = \frac{\pi}{2} - \theta(t)$ e $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \theta(t)\right) = \frac{y(t)}{d(t)}$.

Assim: $d(t)\cos\theta(t) = y(t)$. Derivando, temos:

$(d(t)\cos\theta(t))' = y'(t) \Rightarrow d'(t)\cos\theta(t) + d(t)(-\text{sen}\,\theta(t)\theta'(t)) = y'(t)$

Em t_0: $d'(t_0)\cos\theta(t_0) + d(t_0)(-\text{sen}\,\theta(t_0))\theta'(t_0) = y'(t_0)$

Mas $d(t_0) = \frac{y(t_0)}{\cos\theta(t_0)} = \frac{16}{\sqrt{3}/2} = \frac{32}{\sqrt{3}}$ m.

Assim $d'(t_0) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{32}{\cancel{\sqrt{3}}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2}\cancel{\sqrt{3}} + 30 \Rightarrow \boxed{d'(t_0) = (62)\frac{2}{\sqrt{3}}\ m/min}$

1. (3,0) Calcule os seguintes limites, caso existam. **Justifique!**

   (a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 \cos x + x^5 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{3x^4+2x^2+5}$

   (b) $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{\sqrt{10-x^2}-1}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}}$

   (c) $\lim_{x\to-\infty} (\sqrt[3]{x^3-x^2}-x)$

(a) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^3\cos x + x^5 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{3x^4+2x^2+5} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\overset{\to 0}{\dfrac{\cos x}{x}} + \overset{\to 1}{x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}}{3 + \underset{\to 0}{\dfrac{2}{x^2}} + \underset{\to 0}{\dfrac{5}{x^4}}} = \dfrac{1}{3}$

Justificativa

(i) $\lim_{x\to+\infty} \cos x \cdot \dfrac{1}{x} = 0$, pois $|\cos x| \le 1$ para todo x e $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

(ii) $\lim_{x\to+\infty} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$ pois $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ e $\lim_{t\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$

(b) $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{\sqrt{10-x^2}-1}{\sqrt{x^3-6x^2+9x}} = \lim_{x\to 3^-} \dfrac{10-x^2-1}{(\sqrt{10-x^2}+1)\sqrt{x^3-6x^2+9x}} =$

$= \lim_{x\to 3^-} \dfrac{(3+x)(3-x)}{(\sqrt{10-x^2}+1)(\sqrt{x(x-3)^2})} = \lim_{x\to 3^-} \dfrac{(3+x)(3-x)}{(\sqrt{10-x^2}+1)|x-3|\sqrt{x}} \overset{(*)}{=}$

$= \lim_{x\to 3^-} \dfrac{(3+x)}{(\sqrt{10-x^2}+1)\sqrt{x}} = \dfrac{6}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

(*) Para $x < 3$, temos $|x-3| = 3-x$

(c)

$$\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-x\right)\left[\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3-x^2}+x^2\right]=x^3-x^2-x^3=-x^2$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{\left(\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3-x^2}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{\left(x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)^2+x\,x\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}\right)^2+\sqrt[3]{1-\frac{1}{x}}+1}=-\frac{1}{3}$$

2. Seja

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\frac{1}{x}) \left[\frac{\cos(5x^2)-1}{x^2}\right] & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

(a) (1,5) A função f é derivável em $x = 0$? **JUSTIFIQUE!**

(b) (1,5) Calcule $f'(x)$ para $x \neq 0$.

a) Para verificar se f é derivável em $x=0$ precisamos saber se existe $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{\cos(5x^2)-1}{x^3}\right)$

Note que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(5x^2)-1}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(5x^2)-1}{x^3}\cdot\frac{\cos(5x^2)+1}{\cos(5x^2)+1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}^2(5x^2)}{x^3}\cdot\frac{1}{\cos(5x^2)+1} = \lim_{x\to 0} -25x\,\frac{\operatorname{sen}^2(5x^2)}{25x^4}\cdot\frac{1}{\cos(5x^2)+1} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{-25x}_{0}\cdot\underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}(5x^2)}{5x^2}\right)^2}_{1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos(5x^2)+1}}_{1/2} = 0$$

$\left[\text{Obs: } \lim \frac{\operatorname{sen}(5x^2)}{5x^2} = (u=5x^2 \quad x\to 0 \Rightarrow u\to 0) = \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1\right]$

Como $g(x)=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ é uma função limitada (pois $-\pi/2 < \operatorname{arctg}\frac{1}{x} < \pi/2 \quad \forall x\in\mathbb{R}, x\neq 0$), por uma consequência do Teorema do Confronto, temos que:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arctg}(1/x)\cdot\overbrace{\left(\frac{\cos(5x^2)-1}{x^2}\right)}^{0} = 0.$$

Logo f é derivável em $x=0$ e $f'(0)=0$.

b) $f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\frac{-1}{x^2}\cdot\left(\frac{\cos(5x^2)-1}{x^2}\right) + \operatorname{arctg}(1/x)\cdot g'(x)$, onde

$$g'(x) = \left(\frac{\cos(5x^2)-1}{x^2}\right)' = \frac{-\operatorname{sen}(5x^2).10x.x^2 - 2x(\cos(5x^2)-1)}{x^4} =$$

$$= \frac{-10x^3\operatorname{sen}(5x^2) - 2x(\cos(5x)-1)}{x^4}$$

3. (1,5) Determine a reta que é tangente ao gráfico de

$$f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$$

e passa pelo ponto $(1,1)$.

Domínio $f = D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$
f é derivável em todos os pontos de seu domínio

A reta tangente ao gráfico de f em um ponto $(x_0, f(x_0))$ tem equação

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

No caso, $f'(x) = \dfrac{3(x-1) - (3x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{-4}{(x-1)^2}$ para todo $x \neq 1$

Se $(x_0, f(x_0))$ está no gráfico de f, então $x_0 \neq 1$ e

$$\boxed{y - \left(\frac{3x_0+1}{x_0-1}\right) = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(x - x_0) \quad (*)}$$

Queremos que a reta passe por $(1,1)$. Substituindo em $(*)$ temos

$$1 - \left(\frac{3x_0+1}{x_0-1}\right) = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(1 - x_0)$$

Logo $x_0 - 1 - 3x_0 - 1 = 4$

$$-2x_0 = 6 \Rightarrow \boxed{x_0 = -3}$$

$$f(x_0) = \frac{-9+1}{-3-1} = 2 \qquad f'(x_0) = \frac{-4}{16} = -\frac{1}{4}$$

Logo a equação da reta é

$$\boxed{y - 2 = -\frac{1}{4}(x+3)}$$