Questão 1. Calcule o limite ou justifique porque não existe:

a) (1,0 ponto) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x^2-6x+9}$

b) (1,0 ponto) $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-5x+1}\right)$

c) (1,0 ponto) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{tg}^2(x-2)\,\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)}{x-2}$

(a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x^2-6x+9} = \lim_{x\to 3} \dfrac{\cancel{x-3}}{(x-3)^{\cancel{2}}\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{9}\right)} =$

$= \lim_{x\to 3} \dfrac{1}{\underbrace{(x-3)}_{0}\underbrace{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{9}\right)}_{>0}}$

$\lim_{x\to 3^+} \dfrac{1}{\underbrace{(x-3)}_{\substack{0 \\ >0}}\underbrace{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{9}\right)}_{>0}} = +\infty$ e $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{1}{\underbrace{(x-3)}_{\substack{0 \\ <0}}\underbrace{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{9}\right)}_{>0}} = -\infty$

Logo o limite não existe.

(b) $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-5x+1}\right) = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{\cancel{x^2}+\cancel{1}-\cancel{x^2}+5x-\cancel{1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-5x+1}} =$

$= \lim_{x\to -\infty} \dfrac{5x}{\underbrace{|x|}_{-x \text{ pois } x<0}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{5\cancel{x}}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}}+\sqrt{1-\underbrace{\frac{5}{x}}_{0}+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}}\right)} = -\dfrac{5}{2}$

c) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{tg}^2(x-2)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{\cos^2(x-2)} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2} \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-2}\right) = 0$

pois $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)$ é uma função limitada e

$\lim_{x\to 2} \dfrac{\overbrace{\operatorname{sen}(x-2)}^{\to 0}}{\underbrace{\cos^2(x-2)}_{\to 1}} \overbrace{\dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2}}^{\to 1} = 0$

<u>Obs</u>: $\lim_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{sen}(x-2)}{x-2} = \lim_{u\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$

$u = x-2 \qquad x\to 2 \Rightarrow u\to 0$

Questão 2. Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(x)\,\sqrt[3]{x-5}}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

a) (1,5 ponto) f é derivável em $x = 5$? E em $x = 0$?

b) (1,0 ponto) Calcule a derivada de f nos pontos em que f é derivável.

c) (1,0 ponto) Seja $g(x) = \sqrt[3]{\text{sen}(x-5)^2}$. A função $h(x) = f(x)g(x)$ é derivável em $x = 5$? Por que?

a) Para $x=5$:

$$\lim_{x\to 5} \frac{f(x)-f(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5} \frac{\text{sen}\,x}{x}\,\frac{\sqrt[3]{x-5}}{x-5} = \lim_{x\to 5} \underbrace{\frac{\text{sen}\,x}{x}}_{\frac{\text{sen}5}{5}<0} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt[3]{(x-5)^2}}_{\to 0\ (>0)}} = -\infty$$

Logo, f não é derivável em $x=5$.

Para $x=0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x}\cdot\sqrt[3]{x-5} = \lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}\,x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x-5} = 1\cdot\sqrt[3]{-5} = -\sqrt[3]{5} \neq 1 = f(0)$$

Portanto, f não é contínua em $x=0$. Consequentemente, f não é derivável em $x=0$.

b) Para $x\neq 0$ e $x\neq 5$, f é derivável, pois $\text{sen}\,x$, x, $\sqrt[3]{x-5}$ são deriváveis nesses pontos

$$f'(x) = \frac{\left(\cos x\cdot\sqrt[3]{x-5} + \text{sen}\,x\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{(x-5)^2}}\right)x - \text{sen}\,x\cdot\sqrt[3]{x-5}}{x^2}$$

c) $$\lim_{x\to 5}\frac{h(x)-h(5)}{x-5} = \lim_{x\to 5}\frac{\text{sen}\,x}{x}\cdot\frac{\sqrt[3]{(x-5)\,\text{sen}(x-5)^2}}{(x-5)}$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{\text{sen}\,x}{x}\sqrt[3]{\frac{\text{sen}(x-5)^2}{(x-5)^2}} = \frac{\text{sen}5}{5},$$

$\left(\text{pois } \lim_{x\to 5}\dfrac{\text{sen}(x-5)^2}{(x-5)^2} = \lim \dfrac{\text{sen}\,u}{u} = 1 \quad u=(x-5)^2,\ x\to 5 \Rightarrow u\to 0\right.$

e $\sqrt[3]{x}$ é contínua $\Big)$

Logo, $h(x)$ é derivável em $x=5$

$\left(\text{e } h'(5) = \frac{\text{sen}5}{5}\right)$

Questão 3.

I) Considere o triângulo retângulo ABC, em que os catetos são $AB = b$ e $AC = h$. Assuma que b e h variam com o tempo t e satisfazem a seguinte relação:

$$b = 2\pi + \operatorname{sen} h.$$

Num determinado instante t_0, tem-se $h = \pi$ e a taxa de variação da área do triângulo ABC é igual a 8π.

i) (1,0 ponto) Calcule a taxa de variação de h no instante t_0.

ii) (1,0 ponto) Calcule a taxa de variação do ângulo $\widehat{ACB}$ no instante t_0.

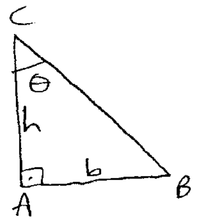
II) (1,5 ponto) Seja $f(x) = \big(\operatorname{tg}(4x) + 2\big)^4(\operatorname{arcsen} x + 1)$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = 0$.

(I)

$A = \dfrac{bh}{2}$

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{b}{h}$

$b = 2\pi + \operatorname{sen} h$



$b(t) = 2\pi + \operatorname{sen} h(t) \Rightarrow b'(t) = \cos h(t) \cdot h'(t)$

$A(t) = \dfrac{b(t)\,h(t)}{2} \Rightarrow A'(t) = \dfrac{b'(t)h(t) + b(t)h'(t)}{2}$

$\operatorname{tg}\theta(t) = \dfrac{b(t)}{h(t)} \Rightarrow \sec^2\theta(t) \cdot \theta'(t) = \dfrac{b'(t)\,h(t) - h'(t)\,b(t)}{h(t)^2}$

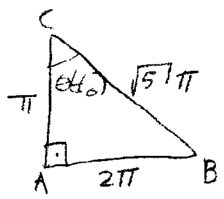
(i) $t = t_0$ $\quad h(t_0) = \pi \Rightarrow b(t_0) = 2\pi$ $\qquad A'(t_0) = 8\pi$

$\Rightarrow b'(t_0) = -h'(t_0)$

$A'(t_0) = \dfrac{b'(t_0)\,h(t_0) + b(t_0)\,h'(t_0)}{2} \Rightarrow 8\pi = \dfrac{-h'(t_0)\pi + 2\pi h'(t_0)}{2} \Rightarrow \boxed{h'(t_0) = 16}$

$\Rightarrow b'(t_0) = -16$

(ii) $t = t_0$



$\cos\theta(t_0) = \dfrac{\pi}{\sqrt{5}\,\pi} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sec^2\theta(t_0) = 5$

$\sec^2\theta(t_0)\,\theta'(t_0) = \dfrac{b'(t_0)\,h(t_0) - h'(t_0)\,b(t_0)}{h(t_0)^2} \Rightarrow 5\theta'(t_0) = \dfrac{-16\pi - 16 \cdot 2\pi}{\pi^2}$

$\Rightarrow \boxed{\theta'(t_0) = -\dfrac{9{,}6}{\pi}}$

(II) $f'(x) = 4(\operatorname{tg}(4x)+2)^3 \sec^2(4x) \cdot 4\,(\operatorname{arcsen} x + 1) + (\operatorname{tg}(4x) + 2)^4 \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\Rightarrow f'(0) = 4 \cdot 2^3 \cdot 4 + 2^4 = 144$

$f(0) = 2^4 = 16$

$\Rightarrow$ reta tangente por $(0,16)$: $\boxed{y = 16 + 144x}$