Questão 1. Calcule o limite ou justifique porque não existe:

a) (1,0 ponto) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x^2-4x+4}$

b) (1,0 ponto) $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3x+1}\right)$

c) (1,0 ponto) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{tg}^2(x-1)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)}{x-1}$

(a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to 2} \dfrac{x-2}{(x-2)^2(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})}$

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{1}{\underbrace{(x-2)}_{0}\underbrace{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})}_{>0}}$

$\lim_{x\to 2^+} \dfrac{1}{\underbrace{(x-2)}_{0,\ >0}\underbrace{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})}_{>0}} = +\infty$, $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{1}{\underbrace{(x-2)}_{0,\ <0}\underbrace{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})}_{>0}} = -\infty$

Logo o limite não existe

(b) $\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3x+1}) = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{\cancel{x^2}+\cancel{1}-\cancel{x^2}+3x-\cancel{1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3x+1}} =$

$= \lim_{x\to -\infty} \dfrac{3x}{\underbrace{|x|}_{-x \text{ pois } x<0}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to -\infty} \dfrac{3\cancel{x}}{-\cancel{x}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}}+\sqrt{1-\underbrace{\frac{3}{x}}_{0}+\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{0}}\right)} = -\dfrac{3}{2}$

(c) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{tg}^2(x-1)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{\cos^2(x-1)} \cdot \overbrace{\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)}^{\lim} = 0$

pois $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)$ é uma função limitada e

$\lim_{x\to 1} \dfrac{\overbrace{\operatorname{sen}(x-1)}^{\to 0}}{\underbrace{\cos^2(x-1)}_{\to 1}} \cdot \overbrace{\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}}^{\to 1} = 0$

<u>Obs:</u> $\lim_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x-1} = \lim_{u\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$

$u = x-1 \qquad x\to 1 \Rightarrow u\to 0$

Questão 2. Seja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(x)\ \sqrt[3]{x-3}}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$

a) (1,5 ponto) f é derivável em $x = 3$? E em $x = 0$?

b) (1,0 ponto) Calcule a derivada de f nos pontos em que f é derivável.

c) (1,0 ponto) Seja $g(x) = \sqrt[3]{\text{sen}(x-3)^2}$. A função $h(x) = f(x)g(x)$ é derivável em $x = 3$? Por que?

a) Para $x=3$:

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\text{sen}\,x}{x} \frac{\sqrt[3]{x-3}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \underbrace{\frac{\text{sen}\,x}{x}}_{\to \frac{\text{sen}3}{3}} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt[3]{(x-3)^2}}_{\to 0\,(>0)}} = +\infty$$

Logo, f não é derivável em $x=3$.

Para $x=0$:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x} \sqrt[3]{x-3} = \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\,x}{x}}_{=1} \cdot \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x-3} = -\sqrt[3]{3} \neq 1 = f(0).$$

Portanto, f não é contínua em $x=0$. Consequentemente, f não é derivável em $x=0$

b) Para $x\neq 0$ e $x\neq 3$, f é derivável, pois sen x, $\sqrt[3]{x-3}$ e x são deriváveis nesses pontos.

$$f'(x) = \frac{\left(\cos x \cdot \sqrt[3]{x-3} + \text{sen}\,x \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-3)^2}}\right)x - \text{sen}\,x\ \sqrt[3]{x-3}}{x^2}$$

c) $$\lim_{x\to 3} \frac{h(x)-h(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\text{sen}\,x}{x} \frac{\sqrt[3]{(x-3)\,\text{sen}(x-3)^2}}{(x-3)}$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{\text{sen}\,x}{x} \sqrt[3]{\frac{\text{sen}(x-3)^2}{(x-3)^2}} = \frac{\text{sen}3}{3}$$

(pois $\lim_{x\to 3} \frac{\text{sen}(x-3)^2}{(x-3)^2} = \lim_{u\to 0} \frac{\text{sen}\,u}{u} = 1$, $u=(x-3)^2$, $x\to 3 \Rightarrow u\to 0$

e $\sqrt[3]{x}$ é contínua)

Logo, $h(x)$ é derivável em $x=3$

(e $h'(3) = \frac{\text{sen}3}{3}$)

Questão 3.

I) Considere o triângulo retângulo ABC, em que os catetos são $AB = b$ e $AC = h$. Assuma que b e h variam com o tempo t e satisfazem a seguinte relação:

$$b = 3\pi + \operatorname{sen} h.$$

Num determinado instante t_0, tem-se $h = \pi$ e a taxa de variação da área do triângulo ABC é igual a 10π.

i) (1,0 ponto) Calcule a taxa de variação de h no instante t_0.

ii) (1,0 ponto) Calcule a taxa de variação do ângulo $\widehat{ACB}$ no instante t_0.

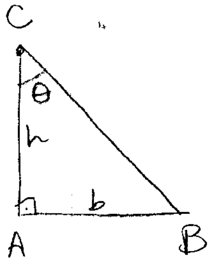
II) (1,5 ponto) Seja $f(x) = \big(\operatorname{tg}(5x) + 2\big)^4(\operatorname{arcsen} x + 1)$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x = 0$.

(I)

$A = \dfrac{bh}{2}$

$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{b}{h}$

$b = 3\pi + \operatorname{sen} h$



$b(t) = 3\pi + \operatorname{sen} h(t) \Rightarrow b'(t) = \cos h(t) \cdot h'(t)$

$A(t) = \dfrac{b(t)h(t)}{2} \Rightarrow A'(t) = \dfrac{b'(t)h(t) + b(t)h'(t)}{2}$

$\operatorname{tg}\theta(t) = \dfrac{b(t)}{h(t)} \Rightarrow \sec^2\theta(t)\,\theta'(t) = \dfrac{b'(t)h(t) - h'(t)b(t)}{h(t)^2}$

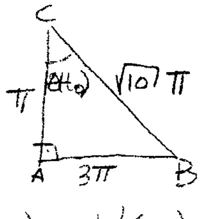
(i) $t = t_0$ $\quad h(t_0) = \pi \Rightarrow b(t_0) = 3\pi$ $\qquad A'(t_0) = 10\pi$

$\Rightarrow b'(t_0) = -h'(t_0)$

$\Rightarrow A'(t_0) = \dfrac{b'(t_0)h(t_0) + b(t_0)h'(t_0)}{2}$

$10\pi = \dfrac{-h'(t_0)\pi + 3\pi h'(t_0)}{2} \Rightarrow \boxed{h'(t_0) = 10} \Rightarrow b'(t_0) = -10$

(ii) $t = t_0$



$\cos\theta(t_0) = \dfrac{\pi}{\sqrt{10}\,\pi} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sec^2\theta(t_0) = 10$

$\sec^2\theta(t_0)\,\theta'(t_0) = \dfrac{b'(t_0)h(t_0) - h'(t_0)b(t_0)}{h(t_0)^2} \Rightarrow 10\theta'(t_0) = \dfrac{-10\pi - 10\cdot 3\pi}{\pi^2}$

$\Rightarrow \boxed{\theta'(t_0) = -\dfrac{4}{\pi}}$

(II) $f'(x) = 4(\operatorname{tg}(5x) + 2)^3 \sec^2(5x)\, 5 \cdot (\operatorname{arcsen} x + 1) + (\operatorname{tg}(5x) + 2)^4 \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\left.\begin{array}{l} f'(0) = 4 \cdot 2^3 \cdot 5 + 2^4 = 176 \\ f(0) = 2^4 = 16 \end{array}\right\} \Rightarrow$ reta tangente por $(0, 16)$: $\boxed{y = 16 + 176x}$