Gabarito da Primeira Prova
MAT-2453 - Tipo A

5 de Abril de 2011

Questão 1. (3,5 pontos) Calcule o limite ou explique porque não existe.

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x^3-4x^2+4x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2-1)+(1-\cos(x-1))\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x-1}\right)}{x-1}$

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^3+1}}-\sqrt{x^2-2x}$

a) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3+x^2-4x-4}{x^3-4x^2+4x} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x+2)(x-2)}{x(x-2)^2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x+2)}{x(x-2)}$$

Temos $\lim\limits_{x\to 2^+}(x+1)(x+2)=12$, $\lim\limits_{x\to 2^+} x(x+2)=0$ e $x(x+2)>0$ p/ $x>2$. Logo, $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{(x+1)(x+2)}{x(x-2)}=+\infty$

Por outro lado, $\lim\limits_{x\to 2^-}(x+1)(x+2)=12$, $\lim\limits_{x\to 2^-} x(x+2)=0$ e $x(x+2)<0$ p/ $x<2$ (e próximo de 2).

$\therefore \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x+1)(x+2)}{x(x-2)}=-\infty$. Como os limites laterais são diferentes,

$\boxed{\text{não existe } \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{x^3-4x^2+4x}}$

b) $$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1)\cdot\frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}(x+1)\cdot\left(\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^2-1}\right) = 2\cdot 1 = 2$$

$= \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$ $\left(\begin{array}{l} y=x^2-1 \\ x\to 1 \Rightarrow y\to 0\end{array}\right)$ (Limite Fundamental)

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\cos(x-1)}{x-1} \underset{\substack{y=x-1\\ x\to 1\Rightarrow y\to 0}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y}\cdot\frac{1+\cos y}{1+\cos y} = \lim_{y\to 0}\underbrace{\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{1\ (\text{Fund.})}\;\frac{\overset{\to 0}{\operatorname{sen} y}}{\underset{\to 2}{1+\cos y}} = 1\cdot 0 = 0$$

Logo, $$\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x^2-1)+(1-\cos(x-1))\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)}{x-1} = \underbrace{\lim_{x\to 1}\frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}}_{2} + \underbrace{\lim_{x\to 1}\underbrace{\left(\frac{1-\cos(x-1)}{x-1}\right)}_{\to 0}\underbrace{\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)\right)}_{\text{limitada}}}_{=0\ (\text{confronto})} = 2+0 = \boxed{2}$$

c) $$\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^3+1}}-\sqrt{x^2-2x}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^3+1}}+\sqrt{x^2-2x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^3+1}}+\sqrt{x^2-2x}\right)} = \lim_{x\to -\infty}\frac{\cancel{x^2}+\sqrt[3]{x^3+1}-\cancel{x^2}+2x}{\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^3+1}}+\sqrt{x^2-2x}}$$

$$= \lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}+2\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} \underset{x<0}{=} \lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}+2}{-\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)} = \boxed{\frac{-3}{2}}$$

Questão 2. (3,0 pontos) Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 - 8}, & \text{se } x \geq 0; \\ x^3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}(5x) + 2}{x}\right), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

a) Determine os pontos em que f é derivável. Justifique.

b) Calcule $f'(x)$ nos pontos em que f é derivável.

(a) f é derivável para $x>0$ e $x \neq 2$ pois $\sqrt[3]{x^3-8}$ é derivável para $x \neq 2$, por ~~sea~~ composta de funções deriváveis.

$x^3 . \operatorname{sen}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}(5x)+2}{x}\right)$ é derivável para $x \neq 0$ pois é produto, composta e quociente de funções deriváveis. Logo f é derivável para $x<0$.

Então f é derivável para $x \neq 0$ e $x \neq 2$.

Para $x=0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{x^3 - 8} = -2$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^3 . \operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arctg}(5x)+2}{x}\right) = 0$$
$\neq$

Logo não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$. Então f não é contínua em $x=0$ e portanto f não é derivável em $x=0$.

Para $x=2$:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt[3]{x^3-8}}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt[3]{x^3-8} . \sqrt[3]{x^2+2x+4}}{\sqrt[3]{(x-2)^3}} =$$

$$= \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt[3]{x^2+2x+4} \to \sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{(x-2)^2} \to 0, >0} = +\infty$$

Logo f não é derivável em $x=2$.

b)

Para $x>0$, $x \neq 2$:

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^3-8}\right)' = \frac{1}{3}(x^3-8)^{-2/3} \cdot 3x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-8)^2}}$$

Para $x<0$:

$$f'(x) = \left(x^3 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arctg}(5x)+2}{x}\right)\right)' =$$

$$= 3x^2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arctg}(5x)+2}{x}\right) + x^3 \cdot \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arctg}(5x)+2}{x}\right)\right)'.$$

Mas temos que:

$$\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arctg}(5x)+2}{x}\right)\right)' = \cos\left(\frac{\operatorname{arctg}(5x)+2}{x}\right) \cdot \left(\frac{\operatorname{arctg}(5x)+2}{x}\right)',$$

onde

$$\left(\frac{\operatorname{arctg}(5x)+2}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{1+25x^2} \cdot 5x - (\operatorname{arctg}(5x)+2)}{x^2}$$

Logo para $x<0$:

$$f'(x) = 3x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arctg}(5x)+2}{x}\right) + x^3 \cos\left(\frac{\operatorname{arctg}(5x)+2}{x}\right) \cdot \left(\frac{\frac{5x}{1+25x^2} - (\operatorname{arctg}(5x}{x^2}\right.$$

Questão 3. (3,5 pontos) Sejam $f(x) = x^2 + 1$, com $x > 0$, e $P = (a, b)$ um ponto sobre o gráfico de f. Considere a reta r tangente ao gráfico de f no ponto P e $Q = (x, 0)$ o ponto em que r intercepta o eixo $0x$.

a) Determine, em termos da abscissa a de P, a abscissa do ponto Q.

Suponha que o ponto P esteja se deslocando sobre o gráfico de f e que no instante em que $P = (2, 5)$ sua abscissa a esteja se deslocando a uma taxa de variação de 3 unidades por segundo.

b) Determine a taxa de variação da abscissa do ponto Q nesse instante.

c) Seja α o ângulo que a reta r forma com o eixo $0x$. Determine a taxa de variação de α nesse mesmo instante.

Solução: a) Uma equação para tal reta é $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, ou seja

$$y - (a^2 + 1) = 2a(x - a).$$

Fazendo $y = 0$ obtemos $x = \dfrac{a}{2} - \dfrac{1}{2a}$.

b) Seja t_0 tal instante. Pelo item a) $x(t) = \dfrac{a(t)}{2} - \dfrac{1}{2a(t)}$. Derivando em t_0:

$$x'(t_0) = \frac{a'(t_0)}{2} + \frac{a'(t_0)}{2(a(t_0))^2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2(2)^2} = \frac{15}{8} \text{ (unidades/seg)}$$

<u>*Outro modo:*</u> $\dfrac{dx}{da} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2a^2}$ e $\dfrac{da}{dt}(t_0) = 3$. Portanto, como $a(t_0) = 2$,

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = \frac{dx}{da}(2) \cdot \frac{da}{dt}(t_0) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2)^2}\right) 3 = \frac{15}{8} \text{ (unidades/seg)}$$

c) Sendo t_0 tal instante:

$$\begin{aligned}
\tan\big(\theta(t)\big) = f'(a(t)) \quad &\Rightarrow \quad \sec^2\big(\theta(t_0)\big) \cdot \theta'(t_0) = f''(a(t_0)) \cdot a'(t_0) \\
&\Rightarrow \quad \theta'(t_0) = \frac{f''(a(t_0)) \cdot a'(t_0)}{1 + \tan^2\big(\theta(t_0)\big)} \\
&\Rightarrow \quad \theta'(t_0) = \frac{f''(a(t_0)) \cdot a'(t_0)}{1 + \big(f'(a(t_0))\big)^2} \\
&\Rightarrow \quad \theta'(t_0) = \frac{2 \cdot 3}{1 + 4^2} = \frac{6}{17} \text{ (rad/seg)}
\end{aligned}$$

<u>*Outro modo:*</u> $\theta(t) = \arctan f'(a(t))$. Então

$$\theta'(t_0) = \frac{1}{1 + (f'(a(t_0)))^2} \cdot f''(a(t_0)) \cdot a'(t_0) = \frac{2 \cdot 3}{1 + 4^2} = \frac{6}{17} \text{ (rad/seg).}$$

Gabarito da Primeira Prova
MAT-2453 - Tipo B

5 de Abril de 2011

Questão 1. (3,5 pontos) Calcule o limite ou explique porque não existe.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-2x^2+x}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{sen}(x^2-4)+(1-\cos(x-2))\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)}{x-2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^3+1}}-\sqrt{x^2-3x}$

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-2x^2+x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x+1)}{x(x-1)}$

Temos $\lim_{x\to 1^+}(x+2)(x+1)=6$, $\lim_{x\to 1^+} x(x-1)=0$ e $x(x-1)>0$ p/ $x>1$. Logo, $\displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{(x+2)(x+1)}{x(x-1)}=+\infty$.

Por outro lado, $\lim_{x\to 1^-}(x+2)(x+1)=6$, $\lim_{x\to 1^-} x(x-1)=0$ e $x(x-1)<0$ p/ $x<1$ (e próximo de 1).

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{(x+2)(x+1)}{x(x-1)}=-\infty$. Como os limites laterais são diferentes,

$\boxed{\text{não existe } \displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-2x^2+x}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{sen}(x^2-4)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2)\frac{\operatorname{sen}(x^2-4)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2}(x+2)\left(\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{sen}(x^2-4)}{x^2-4}\right) = 4.1 = 4.$

$\displaystyle = \lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$ ($y=x^2-4$, $x\to 2 \Rightarrow y\to 0$) (Limite Fundamental)

$\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{1-\cos(x-2)}{x-2} \underset{\substack{y=x-2\\ x\to 2\Rightarrow y\to 0}}{=} \lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y}\cdot\frac{1+\cos y}{1+\cos y} = \lim_{y\to 0}\underbrace{\frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{1\ (\text{Fund.})}\cdot\frac{\overset{\to 0}{\operatorname{sen} y}}{\underset{\to 2}{1+\cos y}} = 1.0 = 0$

Logo, $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{sen}(x^2-4)+(1-\cos(x-2))\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)}{x-2} = \underbrace{\lim_{x\to 2}\frac{\operatorname{sen}(x^2-4)}{x-2}}_{=4} + \underbrace{\lim_{x\to 2}\underbrace{\frac{1-\cos(x-2)}{x-2}}_{0}\underbrace{\operatorname{sen}\frac{1}{x-2}}_{\text{limitada}}}_{=0\ (\text{Confronto})} = 4+0 =$

c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^3+1}}-\sqrt{x^2-3x}\right).\frac{\left(\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^3+1}}+\sqrt{x^2-3x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^3+1}}+\sqrt{x^2-3x}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}+\sqrt[3]{x^3+1}-\cancel{x^2}+3x}{\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^3+1}}+\sqrt{x^2-3x}}$

$\displaystyle = \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}+3\right)}{|x|\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^6}}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)} \underset{x<0}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}}+3}{-\left(\sqrt{1+\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^6}}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)} = -\frac{4}{2} = \boxed{-2}$

B

Questão 2. (3,0 pontos) Seja f a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 - 27}, & \text{se } x \geq 0; \\ x^4 \operatorname{sen}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}(3x) + 5}{x}\right), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

a) Determine os pontos em que f é derivável. Justifique.

b) Calcule $f'(x)$ nos pontos em que f é derivável.

(a) f é derivável para $x > 0$ e $x \neq 3$ pois $\sqrt[3]{x^3 - 8}$ é derivável para $x \neq 3$ por ser composta de funções deriváveis.

$x^4 \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{\operatorname{arctg}(3x) + 5}{x}\right)$ é derivável para $x \neq 0$ pois é produto, composta e quociente de funções deriváveis. Logo f é derivável para $x < 0$.

Então f é derivável para $x \neq 0$ e $x \neq 3$.

· Para $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt[3]{x^3 - 27} = -3$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \underbrace{x^4}_{\to 0} \cdot \overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arctg}(3x) + 5}{x}\right)}^{\text{limitada}} = 0$$

$\neq$

Logo não existe $\lim_{x \to 0} f(x)$. Então f não é contínua em $x = 0$ e portanto f não é derivável em $x = 0$

Para $x = 3$:

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 27}}{x - 3} = \lim_{x \to 3^+} \frac{\sqrt[3]{x - 3} \cdot \sqrt[3]{x^2 + 3x + 9}}{\sqrt[3]{(x - 3)^3}} =$$

$$= \lim_{x \to 3^+} \frac{\overbrace{\sqrt[3]{x^2 + 3x + 9}}^{\to 3}}{\underbrace{\sqrt[3]{(x^3 - 27)^2}}_{\to 0,\ > 0}} = +\infty$$

Logo f não é derivável em $x = 3$.

b) Para $x>0$ e $x \neq 3$:

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^3-27}\right)' = \frac{1}{\cancel{3}}(x^3-27)^{-2/3} \cdot \cancel{3}x^2 = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3-27)^2}}$$

Para $x<0$:

$$f'(x) = \left(x^4 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arctg}(3x)+5}{x}\right)\right)' =$$

$$= 4x^3 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arctg}(3x)+5}{x}\right) + x^4 \cdot \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arctg}(3x)+5}{x}\right)\right)'.$$

Mas temos que:

$$\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arctg}(3x)+5}{x}\right)\right)' = \cos\left(\frac{\operatorname{arctg}(3x)+5}{x}\right) \cdot \left(\frac{\operatorname{arctg}(3x)+5}{x}\right)',$$

onde

$$\left(\frac{\operatorname{arctg}(3x)+5}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{1+9x^2} \cdot 3x - (\operatorname{arctg}(3x)+5)}{x^2}.$$

Logo para $x<0$:

$$f'(x) = 4x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{arctg}(3x)+5}{x}\right) + x^4 \cdot \left(\cos\left(\frac{\operatorname{arctg}(3x)+5}{x}\right)\right) \cdot \left(\frac{\frac{3x}{1+9x^2} - (\operatorname{arctg}(3x) +}{x^2}\right.$$

Questão 3. (3,5 pontos) Sejam $f(x) = x^2 + 1$, com $x > 0$, e $P = (a, b)$ um ponto sobre o gráfico de f. Considere a reta r tangente ao gráfico de f no ponto P e $Q = (x, 0)$ o ponto em que r intercepta o eixo $0x$.
a) Determine, em termos da abscissa a de P, a abscissa do ponto Q.

Suponha que o ponto P esteja se deslocando sobre o gráfico de f e que no instante em que $P = (2, 5)$ sua abscissa a esteja se deslocando a uma taxa de variação de 5 unidades por segundo.
b) Determine a taxa de variação da abscissa do ponto Q nesse instante.
c) Seja α o ângulo que a reta r forma com o eixo $0x$. Determine a taxa de variação de α nesse mesmo instante.

Solução: a) Uma equação para tal reta é $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, ou seja

$$y - (a^2 + 1) = 2a(x - a).$$

Fazendo $y = 0$ obtemos $x = \dfrac{a}{2} - \dfrac{1}{2a}$.

b) Seja t_0 tal instante. Pelo item a) $x(t) = \dfrac{a(t)}{2} - \dfrac{1}{2a(t)}$. Derivando em t_0:

$$x'(t_0) = \frac{a'(t_0)}{2} + \frac{a'(t_0)}{2(a(t_0))^2} = \frac{5}{2} + \frac{5}{2(2)^2} = \frac{25}{8} \text{ (unidades/seg)}$$

<u>*Outro modo:*</u> $\dfrac{dx}{da} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2a^2}$ e $\dfrac{da}{dt}(t_0) = 3$. Portanto, como $a(t_0) = 2$,

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = \frac{dx}{da}(2) \cdot \frac{da}{dt}(t_0) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(2)^2}\right) 5 = \frac{25}{8} \text{ (unidades/seg)}$$

c) Sendo t_0 tal instante:

$$\begin{aligned}
\tan\big(\theta(t)\big) = f'(a(t)) \quad &\Rightarrow \quad \sec^2\big(\theta(t_0)\big) \cdot \theta'(t_0) = f''(a(t_0)) \cdot a'(t_0) \\
&\Rightarrow \quad \theta'(t_0) = \frac{f''(a(t_0)) \cdot a'(t_0)}{1 + \tan^2\big(\theta(t_0)\big)} \\
&\Rightarrow \quad \theta'(t_0) = \frac{f''(a(t_0)) \cdot a'(t_0)}{1 + \big(f'(a(t_0))\big)^2} \\
&\Rightarrow \quad \theta'(t_0) = \frac{2 \cdot 5}{1 + 4^2} = \frac{10}{17} \text{ (rad/seg)}
\end{aligned}$$

<u>*Outro modo:*</u> $\theta(t) = \arctan f'(a(t))$. Então

$$\theta'(t_0) = \frac{1}{1 + (f'(a(t_0)))^2} \cdot f''(a(t_0)) \cdot a'(t_0) = \frac{2 \cdot 5}{1 + 4^2} = \frac{10}{17} \text{ (rad/seg).}$$