Questão 1. (3,0) a) Calcule, caso existam, os seguintes limites:

i) $$\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{2}} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{2}\right)} \frac{\left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}\ \left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}\ \left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}\ \left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}\right)}{\sqrt{x-1}\ \sqrt{x-1}\ (x+1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt{x-1}\ (x+1)} = +\infty,$$

pois $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}{x+1} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$ e $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$.

ii) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x + 2\sqrt{x}}{3x+\cos x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\operatorname{sen} x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(3+\frac{1}{x}\cos x\right)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}\operatorname{sen} x + \frac{2}{\sqrt{x}}}{3+\frac{1}{x}\cos x} = \frac{1}{3},$$

pois $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ e $|\cos x| \leq 1$.

b) Verifique se a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-3x+2-2(x-2)\cos(x-2)}, & \text{se } x \neq 2 \\ -1, & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

é contínua em $x = 2$. Justifique.

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x^2-3x+2-2(x-2)\cos(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{(x-2)(x-1)-2(x-2)\cos(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{|x-2|}{(x-2)\left[(x-1)-2\cos(x-2)\right]}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)}{(x-2)\left[(x-1)-2\cos(x-2)\right]} = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{(x-1)-2\cos(x-2)} = -1 \\[2ex] \displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{-(x-2)}{(x-2)\left[(x-1)-2\cos(x-2)\right]} = \lim_{x\to 2^-} \frac{-1}{(x-1)-2\cos(x-2)} = 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \nexists \lim_{x\to 2} f(x)$$

$\Longrightarrow f$ não é contínua em $x = 2$.

Questão 2. Seja $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(0) = 0$ e

$$\frac{x^6}{\cos x^2 - 1} \leq f(x) \leq \frac{x^4}{x^2 + \operatorname{sen} x^2}, \quad \forall x \neq 0.$$

(2,0) a) Verifique que f é derivável em $x_0 = 0$. Justifique.

(1,0) b) Seja $g(x) = [f(3x) + x] \operatorname{arctg}(\sqrt{1 - x^2})$. Calcule $g'(0)$.

(a) Temos que mostrar que existe $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

Note que

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^{\cancel{6}\,5}}{\cos(x^2) - 1} \cdot \dfrac{1}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^5}{-\operatorname{sen}^2(x^2)} \cdot (1 + \cos(x^2)) =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\dfrac{(x^2)^2}{\operatorname{sen}^2(x^2)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{(1 + \underbrace{\cos(x^2)}_{\to 1})}_{\to 2} = 0 \cdot 1 \cdot 2 = 0$

(obs: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} \underset{u = x^2}{=} \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$, logo $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x^2)^2}{\operatorname{sen}^2(x^2)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\left(\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}\right)^2}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^{\cancel{4}\,3}}{x^2 + \operatorname{sen}(x^2)} \cdot \dfrac{1}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{x}_{\to 0} \cdot \dfrac{1}{1 + \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}}_{\to 1}} = 0 \cdot \dfrac{1}{2} = 0.$

Como, para $x \neq 0$, temos $\dfrac{x^6}{\cos(x^2) - 1} \leq f(x) \leq \dfrac{x^4}{x^2 + \operatorname{sen}(x^2)}$, segue q.

- para $x > 0$: $\underbrace{\dfrac{x^6}{\cos(x^2) - 1} \cdot \dfrac{1}{x}}_{\to 0} \leq \dfrac{f(x)}{x} \leq \underbrace{\dfrac{x^4}{x^2 + \operatorname{sen}(x^2)} \cdot \dfrac{1}{x}}_{\to 0}$

Logo, por (1) e (2), e pelo T. do Confronto, temos que

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

• para $x < 0$; $\underbrace{\dfrac{x^4}{x^2 + \operatorname{sen}(x^2)} \cdot \dfrac{1}{x}}_{\downarrow \atop 0} < \dfrac{f(x)}{x} < \underbrace{\dfrac{x^6}{\cos(x^2) - 1} \cdot \dfrac{1}{x}}_{\downarrow \atop 0}$.

Novamente, por (1) e (2), e pelo teorema do Confronto, segue que $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

Portanto $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, o que implica que f é derivável no 0 e que $f'(0) = 0$.

(b) $g(x) = [f(3x) + x] \cdot \operatorname{arctg}(\sqrt{1-x^2})$

$\therefore\ g'(x) = [f'(3x) \cdot 3 + 1] \cdot \operatorname{arctg}(\sqrt{1-x^2}) +$

$+ [f(3x) + x] \cdot \dfrac{1}{1 + (\sqrt{1-x^2})^2} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \cancel{2}x =$

$= [3f'(3x) + 1] \operatorname{arctg}(\sqrt{1-x^2}) + [f(3x) + x] \cdot \dfrac{-x}{(2 - x^2) \cdot \sqrt{1-x^2}}$

Logo

$g'(0) = [3 \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f'(0)}} + 1] \operatorname{arctg}(1) + [f(0) + 0] \cdot 0 =$

$= \operatorname{arctg} 1 = \pi/4$

B

Questão 3. (2,0) Considere a função $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x^2)) + \sqrt{x+9}}{x^2+1}$.

a) Usando regras de derivação, determine a derivada de f.

b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 0.

a) $$f'(x) = \frac{\left[\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x^2)) + \sqrt{x+9}\right]'(x^2+1) - \left[\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x^2)) + \sqrt{x+9}\right](x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{\left[\cos(\operatorname{tg}(x^2)) \cdot \sec^2(x^2) \cdot 2x + \frac{1}{2\sqrt{x+9}}\right] \cdot (x^2+1) - \left[\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x^2)) + \sqrt{x+9}\right] \cdot 2x}{(x^2+1)^2}.$$

b) Ponto de tangência : $(0, f(0))$

inclinação da reta: $m = f'(0)$.

$$f(0) = \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} 0) + \sqrt{0+9}}{1} = \sqrt{9} = 3$$

$$f'(0) = \frac{\left[\cos 0 \cdot \sec^2 0 \cdot 2 \cdot 0 + \frac{1}{2\sqrt{9}}\right] \cdot 1 - \left[0 + \sqrt{9}\right] \cdot 0}{1}$$

$$f'(0) = \frac{1}{6}$$

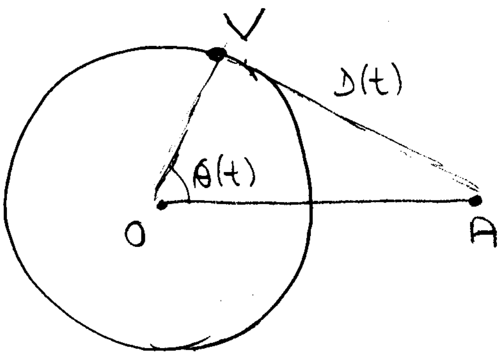
Logo, a equação da reta tangente é

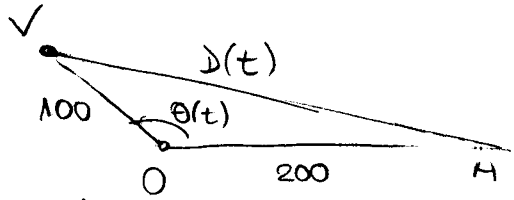
$$y - 3 = \frac{1}{6}(x - 0)$$

$$\boxed{y = \frac{x}{6} + 3}$$

A e B

Questão 4. (2,0) Um velocista corre em uma pista circular de raio 100 m. Seu amigo está parado a uma distância de 200 m do centro da pista. Em um certo instante, quando a distância entre eles é de 200 m, o velocista está se afastando do amigo a uma velocidade de $\frac{1}{3}$ de volta por minuto. Quão rápido a distância entre os amigos está variando nesse momento?





$D(t)$ = distância de A a V

$\theta(t)$ ângulo indicado na figura

Pela lei dos cossenos, temos:

$$D(t)^2 = 10^4 + 4\cdot 10^4 - 2\cdot 10^2 \cdot 2\cdot 10^2 \cos\theta(t).$$

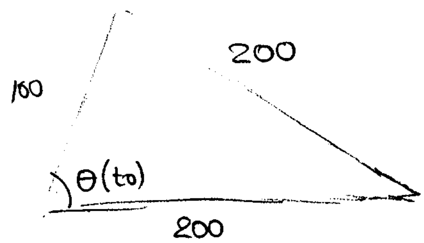
Derivando, obtemos:

$$2D(t)D'(t) = 4\cdot 10^4 \operatorname{sen}\theta(t)\cdot\theta'(t) \qquad (*)$$

É pedido $D'(t_0)$, sabendo que:

$$D(t_0) = 200$$

$$\theta'(t_0) = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/min}$$



$$\operatorname{sen}\theta(t_0) = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cos\theta(t_0) = \frac{1}{4}$$

substituindo em $(*)$

$$2\cdot 200\cdot D'(t_0) = 4\, 10^4 \frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{2\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow D'(t_0) = \frac{50\sqrt{15}\,\pi}{3} \text{ m/min}$$