Questão 1. (3,0) a) Calcule, caso existam, os seguintes limites:

i) $$\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{5}} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{\left(\sqrt[3]{x^2+1}-\sqrt[3]{5}\right)} \frac{\left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}\ \left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}\ \left(\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt{x-2}\ (\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2})}{\sqrt{x-2}\ \sqrt{x-2}\ (x+2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt{x-2}\ (x+2)} = +\infty,$$

pois $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+\sqrt[3]{x^2+1}\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{5^2}}{x+2} = \frac{3\sqrt[3]{25}}{4}$ e $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = +\infty$

ii) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\cos x+3\sqrt{x}}{x+\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(2+\dfrac{1}{x}\cos x+\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(1+\dfrac{1}{x}\operatorname{sen} x\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\dfrac{1}{x}\cos x+\dfrac{3}{\sqrt{x}}}{1+\dfrac{1}{x}\operatorname{sen} x} = \frac{2}{1} = 2,$$

pois $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$, $|\cos x| \le 1$ e $|\operatorname{sen} x| \le 1$.

b) Verifique se a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-3x+2+2(x-1)\cos(x-1)}, & \text{se } x \neq 1 \\[2ex] 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

é contínua em $x = 1$. Justifique.

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x^2-3x+2+2(x-1)\cos(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{(x-1)(x-2)+2(x-1)\cos(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{(x-1)\left[(x-2)+2\cos(x-1)\right]}$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)}{(x-1)\left[(x-2)+2\cos(x-1)\right]} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-2)+2\cos(x-1)} = 1 \\[3ex] \displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)}{(x-1)\left[(x-2)+2\cos(x-1)\right]} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-1}{(x-2)+2\cos(x-1)} = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \nexists \lim_{x\to 1} f(x)$$

$\Longrightarrow f$ não é contínua em $x = 1$.

Questão 2. Seja $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $f(0) = 0$ e

$$\frac{x^6}{\cos x^2 - 1} \leq f(x) \leq \frac{x^4}{x^2 + \operatorname{sen} x^2}, \quad \forall x \neq 0.$$

(2,0) a) Verifique que f é derivável em $x_0 = 0$. Justifique.

(1,0) b) Seja $g(x) = [f(2x) + x] \operatorname{arctg}(\sqrt{1 - x^2})$. Calcule $g'(0)$.

(a) Temos que mostrar que existe $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$.

Note que:

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^{\cancel{6}\,5}}{\cos(x^2) - 1} \cdot \dfrac{1}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^5}{-\operatorname{sen}^2(x^2)} \cdot (1 + \cos(x^2)) =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \underbrace{-x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\dfrac{(x^2)^2}{\operatorname{sen}^2(x^2)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{(1 + \cos(x^2))}_{\to 2} = 0 \cdot 1 \cdot 2 = 0$

(obs: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} = \lim\limits_{u \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} u}{u} = 1$, logo $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x^2)^2}{\operatorname{sen}^2(x^2)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\left(\frac{\operatorname{sen} x^2}{x^2}\right)^2} =$

$u = x^2$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^{\cancel{4}\,3}}{x^2 + \operatorname{sen}(x^2)} \cdot \dfrac{1}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x \to 0} x \cdot \dfrac{1}{1 + \underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}}_{\to 1}} = 0 \cdot \dfrac{1}{2} = 0$

Como, para $x \neq 0$, temos $\dfrac{x^6}{\cos(x^2) - 1} \leq f(x) \leq \dfrac{x^4}{x^2 + \operatorname{sen}(x^2)}$, segue que:

· para $x > 0$: $\underbrace{\dfrac{x^6}{\cos(x^2) - 1} \cdot \dfrac{1}{x}}_{\to 0} \leq \dfrac{f(x)}{x} \leq \underbrace{\dfrac{x^4}{x^2 + \operatorname{sen}(x^2)} \cdot \dfrac{1}{x}}_{\to 0}$.

Logo, por (1) e (2), e pelo T. do Confronto, temos que

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

• para $x<0$: $\underbrace{\dfrac{x^4}{x^2+\operatorname{sen}(x^2)}\cdot\dfrac{1}{x}}_{\downarrow\, 0} < \dfrac{f(x)}{x} < \underbrace{\dfrac{x^6}{\cos(x^2)-1}\cdot\dfrac{1}{x}}_{\to 0}$

Novamente, por (1) e (2), e pelo T. do Confronto segue que $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}=0$

Portanto $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, o que implica que f é derivável no 0 e que $f'(0)=0$.

(b) $g(x)=[f(2x)+x]\cdot\operatorname{arctg}(\sqrt{1-x^2})$

$\therefore\ g'(x)=[f'(2x).2+1]\operatorname{arctg}(\sqrt{1-x^2})+$

$[f(2x)+x]\cdot\dfrac{1}{1+(\sqrt{1-x^2})^2}\cdot\dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot -\cancel{2}x=$

$=[2f'(2x)+1]\cdot\operatorname{arctg}(\sqrt{1-x^2})+[f(2x)+x]\cdot\dfrac{-x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

Logo

$g'(0)=[3.\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f'(0)}}+1]\operatorname{arctg}1+[f(0)+0].0=$

$=\operatorname{arctg}1=\pi/4$.

A

Questão 3. (2,0) Considere a função $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x^2)) + \sqrt{x+4}}{x^2+1}$.

a) Usando regras de derivação, determine a derivada de f.

b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 0.

a) $$f'(x) = \frac{\left[\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x^2)) + \sqrt{x+4}\right]'(x^2+1) - \left[\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x^2)) + \sqrt{x+4}\right]\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{\left[\cos(\operatorname{tg}(x^2))\cdot \sec^2(x^2)\cdot 2x + \frac{1}{2\sqrt{x+4}}\right](x^2+1) - \left[\operatorname{sen}(\operatorname{tg}(x^2)) + \sqrt{x+4}\right]\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

b) Equação da reta tangente

Ponto de tangência : $(0, f(0))$

inclinação : $m = f'(0)$

$$f(0) = \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{tg} 0) + \sqrt{0+4}}{1} = \sqrt{4} = 2.$$

$$f'(0) = \frac{\left[\cos 0 \cdot \sec^2 0 \cdot 2\cdot 0 + \frac{1}{2\sqrt{4}}\right]\cdot 1 - \left[0 + \sqrt{4}\right]\cdot 0}{1} = \frac{1}{4}.$$

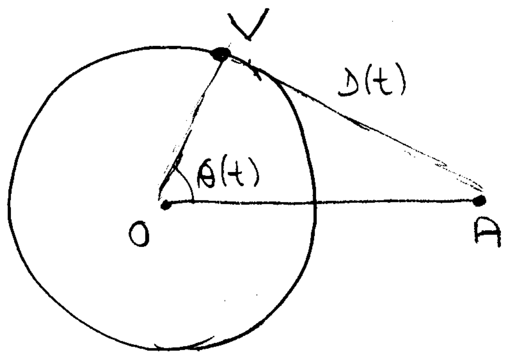
Portanto, a equação da reta tangente é:

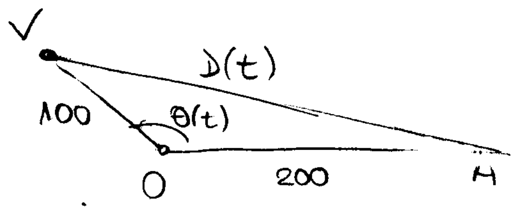
$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 0)$$

$$\boxed{y = \frac{x}{4} + 2}$$

A e B

Questão 4. (2,0) Um velocista corre em uma pista circular de raio 100 m. Seu amigo está parado a uma distância de 200 m do centro da pista. Em um certo instante, quando a distância entre eles é de 200 m, o velocista está se afastando do amigo a uma velocidade de $\frac{1}{3}$ de volta por minuto. Quão rápido a distância entre os amigos está variando nesse momento?





D(t) = distância de A a V

θ(t) ângulo indicado na figura

Pela lei dos cossenos, temos:

$$D(t)^2 = 10^4 + 4 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^2 \cos \theta(t).$$

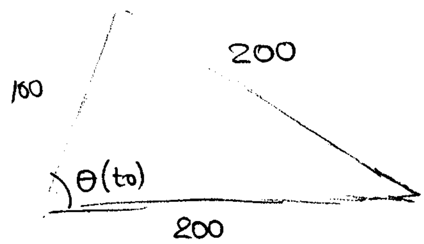
Derivando, obtemos:

$$2D(t)D'(t) = 4 \cdot 10^4 \operatorname{sen} \theta(t) \cdot \theta'(t) \quad (*)$$

É pedido $D'(t_0)$, sabendo que:

$$D(t_0) = 200$$

$$\theta'(t_0) = \frac{2\pi}{3} \text{ rad/min}$$



$$\operatorname{sen} \theta(t_0) = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\cos \theta(t_0) = \frac{1}{4}$$

substituindo em (*)

$$2 \cdot 200 \cdot D'(t_0) = 4 \cdot 10^4 \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{2\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow D'(t_0) = \frac{50\sqrt{15}\,\pi}{3} \text{ m/min}$$