Gabarito de Primeira Prova de Cálculo I - Turma A2

Questão 1. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)}{1-\cos(2x)} = \lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x}\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}\frac{1}{\frac{1-\cos(2x)}{2x}} = \frac{4}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(4x)}{4x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1-\cos(2x)}{2x}}$

$\displaystyle = 2\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1-\cos(2x)}{2x}} = 2.1.\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1-\cos(t)}{t}} = \pm\infty$, uma vez que $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\cos(t)}{t} = 0^+$ e $\displaystyle\lim_{t\to 0^-}\frac{1-\cos(t)}{t} = 0^-$.

(b) $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{2t^2+4}-2}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(\sqrt{2t^2+4}-2)(\sqrt{2t^2+4}+2)}{t(\sqrt{2t^2+4}+2)} = \lim_{t\to 0}\frac{2t^2+4-4}{t(\sqrt{2t^2+4}+2)}$

$\displaystyle = \lim_{t\to 0}\frac{2t^2}{t(\sqrt{2t^2+4}+2)} = \lim_{t\to 0}\frac{2t}{\sqrt{2t^2+4}+2} = \frac{2.0}{\sqrt{2.0^2+4}+2} = \frac{0}{4} = 0.$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x+x\operatorname{sen}(3x)}{5x^2-2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x}}{5-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{5} = 0$. (pois $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} = 0$, uma vez que $\operatorname{sen}(3x)$ é uma função limitada).

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{x^5-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+}-\frac{x^5-1}{x-1} = -\lim_{x\to 1^+}\frac{x^5-1}{x-1} = -\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}{x-1}$

$\displaystyle = -\lim_{x\to 1^+}(x^4+x^3+x^2+x+1) = -5.$

Questão 2. Seja f uma função contínua em R tal que $f(0)=1$ e $f(2)=-1$, e seja $g(x)=x^2+3x+2$. Mostre que a função composta $h(x)=f(g(x))$ possui pelo menos duas raízes negativas distintas e determine intervalos abertos disjuntos contendo cada uma dessas raízes.

Resolução: Como f e g são contínuas, o mesmo ocorre com a função composta $h(x)=f(g(x))$. Descobrindo-se valores a e b tais que $g(a)=0$ e $g(b)=2$, tem-se $h(a)=f(g(a))=f(0)=1>0$ e $h(b)=f(g(b))=f(2)=-1<0$. O Teorema do Valor Intermediário garante que existe c entre a e b tal que $h(c)=0$. Deve-se, então, resolver as equações $g(a)=0$ e $g(b)=2$. Essas equações, são, respectivamente,

$$a^2+3a+2=0 \text{ e } b^2+3b+2=2.$$

A primeira tem soluções $a_1=-2$ e $a_2=-1$ e a segunda tem soluções $b_1=-3$ e $b_2=0$. Assim, pode-se afirmar que h tem raízes nos intervalos $(-3,-2)$, $(-2,0)$, $(-3,-1)$ e $(-1,0)$. (Observe que as raízes em $(-3,-2)$ e em $(-3,-1)$ podem ser iguais; o mesmo ocorrendo com as raízes em $(-2,0)$ e $(-1,0)$). Como os intervalos $(-3,-2)$ e $(-1,0)$ são disjuntos, é certo que existe, em cada um deles, uma raíz de h. Elas são, obviamente, negativas.

Questão 3. Encontre os pontos do gráfico de $y = \dfrac{x^2}{x^2+x+1}$, em que a reta tangente é horizontal.
Resolução: As derivas nos pontos procurados devem ser nulas (pois o coeficiente angular de uma reta horizontal é zero). Tem-se, pela regra de derivação do quociente de funções:

$$y' = \frac{(x^2+x+1)(2x) - x^2(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x\,(x+2)}{(x^2+x+1)^2} = 0 \Longleftrightarrow x\,(x+2) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -2.$$

Os pontos são $P_1 = (0, \dfrac{0^2}{0^2+0+1}) = (0,0)$ e $P_2 = (-2, \dfrac{(-2)^2}{(-2)^2+(-2)+1}) = (-2, \dfrac{4}{3})$.

Questão 4. Encontre $f'(x)$ em que:

(a) $f(x) = x\operatorname{sen}(\dfrac{1+x}{1-x})$, $x \neq 1$. **Resolução:**

$$\begin{aligned}
f'(x) &= x\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(\frac{1+x}{1-x}) + \operatorname{sen}(\frac{1+x}{1-x})\frac{d}{dx}x = x\cos(\frac{1+x}{1-x})\frac{d}{dx}(\frac{1+x}{1-x}) + \operatorname{sen}(\frac{1+x}{1-x}).1 \\
&= x\cos(\frac{1+x}{1-x})\left[\frac{(1-x).1-(1+x).(-1)}{(1-x)^2}\right] + \operatorname{sen}(\frac{1+x}{1-x}).1 \\
&= x\cos(\frac{1+x}{1-x})\frac{2}{(1-x)^2} + \operatorname{sen}(\frac{1+x}{1-x}) = \frac{2x}{(1-x)^2}\cos(\frac{1+x}{1-x}) + \operatorname{sen}(\frac{1+x}{1-x}).
\end{aligned}$$

(b) $f(x) = \cos^4(x^7 - 4x + \dfrac{\pi}{4})$ **Resolução:**

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 4\cos^3(x^7-4x+\frac{\pi}{4})\frac{d}{dx}\cos(x^7-4x+\frac{\pi}{4}) \\
&= 4\cos^3(x^7-4x+\frac{\pi}{4})\left[-\operatorname{sen}(x^7-4x+\frac{\pi}{4})\frac{d}{dx}(x^7-4x+\frac{\pi}{4})\right] \\
&= 4\cos^3(x^7-4x+\frac{\pi}{4})\left[-\operatorname{sen}(x^7-4x+\frac{\pi}{4})(7x^6-4)\right] \\
&= 4(4-7x^6)\cos^3(x^7-4x+\frac{\pi}{4})\operatorname{sen}(x^7-4x+\frac{\pi}{4}).
\end{aligned}$$