Gabarito de Primeira Prova de Cálculo I - Turma B2

Questão 1. Calcule os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{1-x} = \lim_{x\to 1^+} -\frac{\sqrt{(x-1)(x+1)}}{x-1} = -\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}{x-1} = -\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x+1} \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} =$ $\displaystyle-\sqrt{2} \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = -\infty.$

(b) $\displaystyle\lim_{t\to -\infty} \frac{2t(t-1)}{4+9t^2} = \lim_{t\to -\infty} \frac{2t^2-2t}{4+9t^2} = \lim_{t\to -\infty} \frac{2-\frac{2}{t}}{\frac{4}{t^2}+9} = \frac{2}{9}.$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-16}}{|x|} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x^2-16}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-16}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{16}{x^2}\right)} =$ $\sqrt{1} = 1.$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{\text{sen}(5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{2x} \frac{2x}{5x\frac{\text{sen}(5x)}{5x}} = \frac{2}{5} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{2x} \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\text{sen}(5x)}{5x}} =$

$\displaystyle\frac{2}{5} \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t)-1}{t} \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0} \frac{\text{sen}(t)}{t}} = \frac{2}{5}.0.1 = 0.$

Questão 2. Seja $g(x) = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Considere a seguinte função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{|x|}, \text{ se } x \neq 0 \\ \\ a, \text{ se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Encontre os pontos de descontinuidade da função $f(g(x))$. Justifique.

Resolução: Se $g(x) = 0$,isto é, se $x^2 - 1 = 0$,então $f(g(x)) = f(a)$. Mas, $x^2 - 1 = 0 \iff x = -1$ ou $x = 1$. Portanto, $f(g(\pm 1)) = f(a)$. Por outro lado, se $x \neq \pm 1$, então $g(x) \neq 0$ e

$$f(g(x)) = \frac{2g(x)}{|g(x)|} = \begin{cases} \dfrac{2g(x)}{g(x)} = 2, \text{ se } g(x) > 0, \text{ isto é, se } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \\ \\ \dfrac{2g(x)}{-g(x)} = -2, \text{ se } g(x) < 0, \text{ isto é, se } x \in (-1, 1). \end{cases}.$$

Assim, tem-se $\displaystyle\lim_{x\to -1^-} f(g(x)) = 2$ e $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(g(x)) = -2$, o que mostra que $\displaystyle\nexists \lim_{x\to -1} f(g(x))$, ou seja, $f(g(x))$ não é contínua em $x = -1$. De modo análogo se conclui que $f(g(x))$ não é contínua em $x = 1$, pois $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(g(x)) = -2$ e $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(g(x)) = 2$.**Resp.:** $x = -1$ e $x = 1$.

(b) Encontre um valor de a de modo que $g(f(x))$ seja uma função contínua.

Resolução: Se $x \neq 0$ então $g(f(x)) = g(\frac{2x}{|x|}) = (\frac{2x}{|x|})^2 - 1 = 4\frac{x^2}{x^2} - 1 = 3$. Por outro lado, em $x = 0$ tem-se: $g(f(0)) = g(a) = a^2 - 1$. Assim, tem-se:

$$g(f(x)) = \begin{cases} 3, \text{ se } x \neq 0 \\ \\ a^2 - 1, \text{ se } x = 0. \end{cases}$$

O único ponto descontinuidade possível para essa função é $x = 0$. Para que $g(f(x))$ seja contínua nesse ponto deve-se ter $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x)) = g(a)$. Como $\lim\limits_{x\to 0} g(f(x)) = \lim\limits_{x\to 0} 3 = 3$ e $g(a) = a^2 - 1$, o valor de a deve ser tal que $3 = a^2 - 1$, ou seja, $a^2 = 4$. Assim basta tomar $a = -2$ ou $a = 2$, para que $g(f(x))$ seja uma função contínua.

Questão 3. Encontre os pontos do gráfico de $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ em que a reta tangente é paralela a reta $2y + 4x = 1$.

Resolução: A reta dada tem equação $y = \dfrac{1-4x}{2}$, ou seja, $y = \dfrac{1}{2} - 2x$. Portanto, o coeficiente angular dessa reta é -2. Os pontos procurados devem ter derivadas iguais a -2 (pois os coeficientes angulares de retas paralelas devem ser iguais). Tem-se, pela regra de derivação do quociente de funções:

$$y' = \frac{(x+1)(2x) - x^2(1)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}.$$

Assim, deve-se resolver a equação $\dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = -2$, isto é, $x^2 + 2x = -2(x+1)^2$. Simplificando, essa equação fica $3x^2 + 6x + 2 = 0$, .cujas raízes são $x_1 = -1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$ e $x_2 = -1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$. Os pontos procurados são, então, os seguintes:

$$P_1 = (-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 1}) = (-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, -4\frac{\sqrt{3}}{3} - 2) \text{ e}$$

$$P_2 = (-1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 1}) = (-1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, 4\frac{\sqrt{3}}{3} - 2).$$

Questão 4. Calcule $f'(0)$ em que:

(a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 6}{x - 2}$. **Resolução:**$f'(x) = \dfrac{(x-2)(4x+3) - \left(2x^2 + 3x - 6\right)(1)}{(x-2)^2}$. Assim, substituindo x por 0 nessa expressão, obemos

$$f'(0) = \frac{(-2)(3) - (-6)\,(1)}{(-2)^2} = 0.$$

(b) $f(x) = \operatorname{sen}^3(x^2 + \sqrt{2x + \frac{\pi^2}{16}})$ **Resolução:**

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3\operatorname{sen}^2(x^2 + \sqrt{2x + \frac{\pi^2}{16}})\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(x^2 + \sqrt{2x + \frac{\pi^2}{16}}) \\
&= 3\operatorname{sen}^2(x^2 + \sqrt{2x + \frac{\pi^2}{16}})\cos(x^2 + \sqrt{2x + \frac{\pi^2}{16}})\frac{d}{dx}(x^2 + \sqrt{2x + \frac{\pi^2}{16}}) \\
&= 3\operatorname{sen}^2(x^2 + \sqrt{2x + \frac{\pi^2}{16}})\cos(x^2 + \sqrt{2x + \frac{\pi^2}{16}})\left[2x + \frac{1}{2}\left(2x + \frac{\pi^2}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}(2)\right] \\
&= 3\operatorname{sen}^2(x^2 + \sqrt{2x + \frac{\pi^2}{16}})\cos(x^2 + \sqrt{2x + \frac{\pi^2}{16}})\left[2x + \left(2x + \frac{\pi^2}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}\right].
\end{aligned}
$$

Substituindo x por 0, obtemos

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= 3\operatorname{sen}^2(\sqrt{\frac{\pi^2}{16}})\cos(\sqrt{\frac{\pi^2}{16}})\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= 3\operatorname{sen}^2(\frac{\pi}{4})\cos(\frac{\pi}{4})\left(\frac{16}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{4}{\pi}\right) = \frac{3}{\pi}\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$