Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas – ICEx
Departamento de Matemática

Cálculo I

1º Semestre de 2008 – Resolução da 1ª Prova - 09/04/2008

1ª questão. 1) Derive: $y = \sqrt{\cos 6x^2} + \cos^2 \sqrt{6x}$

2) Derive: $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x+1)(x+3)}$

3) Calcule: $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{11-x}-3}{\sqrt{6-x}-2}$

4) Calcule: $\lim_{x\to\infty} \sqrt{3x^2+8x+6} - \sqrt{3x^2+3x+1}.$

Solução.

1) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{\cos 6x^2}}.(-\text{sen}6x^2).12x + 2\cos\sqrt{6x}(-\text{sen}\sqrt{6x})\dfrac{6}{2\sqrt{6x}}$

$y' = \dfrac{-6x\text{sen}6x^2}{\sqrt{\cos 6x^2}} - \dfrac{\sqrt{6}\cos\sqrt{6x}\text{sen}\sqrt{6x}}{\sqrt{x}}$

2)

$$y = \frac{x^2-4x+3}{x^2+4x+3} \Rightarrow y' = \frac{(x^2+4x+3)(2x-4)-(x^2-4x+3)(2x+4)}{(x^2+4x+3)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{8(x^2-3)}{(x+1)^2(x+3)^2}.$$

3) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{11-x}-3}{\sqrt{6x-2}-2} = \lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{11-x}-3}{\sqrt{6x-2}-2}.\dfrac{\sqrt{11-x}+3}{\sqrt{6x-2}+2}.\dfrac{\sqrt{6x-2}+2}{\sqrt{11-x}+3}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{11-x-9}{6-x-4}.\frac{\sqrt{6x-2}+2}{\sqrt{11-x}+3} = \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{2-x}.\frac{\sqrt{6x-2}+2}{\sqrt{11-x}+3} = \frac{\sqrt{4}+2}{\sqrt{9}+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

4) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{(3x^2+8x+6)-(3x^2+3x+1)}{\sqrt{3x^2+8x+6}+\sqrt{3x^2+3x+1}} = \lim_{x\to\infty} \dfrac{5x+5}{\sqrt{3x^2+8x+6}+\sqrt{3x^2+3x+1}}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5+\frac{5}{x}}{\sqrt{3+\frac{8}{x}+\frac{6}{x^2}}+\sqrt{3+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \frac{5}{2\sqrt{3}}.$$

2ª questão. Ache as constantes a e b para que f seja contínua se

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Solução. Para f ser contínua em $x = 0$, o limite do seu numerador deve ser 0 :

$$\sqrt{a.0+b}-2=0 \Rightarrow \sqrt{b}=2 \Rightarrow \boxed{b=4}, \text{ para que exista o } \lim_{x\to 0} f(x).$$

Para que f seja contínua:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{ax+b}-2}{x}=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{ax+\cancel{4}-\cancel{4}}{x\sqrt{ax+b}+2)}=\frac{a}{\sqrt{4}+2}=\frac{a}{4}=1 \Rightarrow \boxed{a=4}$$

Resp: $\boxed{a=4,\ b=4}$

3ª questão. Ache as equações das retas tangentes à curva $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ as quais são paralelas à reta $x - 2y = 2$.

Solução.

$$x-2y=2 \Rightarrow y=\frac{1}{2}x-1 \Rightarrow \text{Esta reta tem inclinação } \frac{1}{2}.$$

A inclinação da reta tangente ao gráfico $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ no ponto $P(x, y)$ é y'. Portanto:

$$y'=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow (x+1)^2=4 \Rightarrow x+1=\pm 2 \Rightarrow x=1, \text{ou } x=-3.$$

Se $x = 1$ então $y = \dfrac{1-1}{1+1} = 0$ e a equação da tangente é $y-0 = \dfrac{1}{2}(x-1)$ ou $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$.
Se $x = -3$ então $y = \dfrac{-3-1}{-3+1} = 2$ e a equação da tangente é $y - 2 = \dfrac{1}{2}(x + 3)$ ou $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$.

Resp: As tangentes são: $\boxed{y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2} \quad \text{e} \quad y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}.}$

4ª questão. Admitindo que a equação defina uma função f tal que $y = f(x)$ calcule y'' no ponto $P(1, 0)$ se:

$$3y^4+4x-x^2\text{sen}y-4=0.$$

Solução. Derivando implicitamente a equação em relação a x,

$$12y^3y'+4-x^2\cos y y'-2x\text{sen}y=0,$$

onde foram usadas a regra da cadeia e a do produto.

$$\Rightarrow (12y^3-x^2\cos y)y'=2x\text{sen}y-4 \quad (*)$$

A equação (*) em $P(1, 0) \Rightarrow -y' = -4 \Rightarrow$ $\boxed{y'=4}$ em $P(1, 0)$. Derivando (*):

$$(12y^3-x^2\cos y)y''+(36y^2y'+x^2\text{sen}yy'-2x\cos y)y'=2x\cos yy'+2\text{sen}y.$$

Em $P(1, 0)$, $x = 1$, $y = 0$ e $y' = 4$, donde

$$(0-1)y''+(0+0-2)4=2(4) \Rightarrow \boxed{y''=-16 \text{ em } P(1,0)}.$$