UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICEx
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Cálculo I
1º Semestre de 2008 – 2ª Prova - 30/05/2008

1. **(8 pontos) Calcule**

(a) $\int (3\text{sen}x + 3x + 5)^{10}(\cos x + 1)\, dx.$

Solução . Integrando por substituição:

$$u = 3\text{sen}x + 3x + 5,\ du = (3\cos x + 3)dx,\ dx = \frac{du}{3(\cos x + 1)}$$

$\int (3\text{sen}x+3x+5)^{10}(\cos x+1)\, dx = \int u^{10}(\cos x+1)\frac{du}{3(\cos x + 1)} . = \frac{1}{3}\int u^{10}du =$
$\frac{1}{3}(\frac{u^{11}}{11} + C) = \boxed{\frac{1}{33}(3\text{sen}x + 3x + 5)^{11} + \frac{C}{3}.}$

(b) $\int \sqrt[3]{8(t-2)^6(t+\frac{1}{2})^3}\, dt.$

Solução . $\int \sqrt[3]{8(t-2)^6(t+\frac{1}{2})^3}\, dt = \int 2(t-2)^2(t+\frac{1}{2})\, dt = \int 2(t^2 - 4t + 4)(t + \frac{1}{2})\, dt =$
$2\int (t^3 - 4t^2 + 4t + \frac{1}{2}t^2 - 2t + 2)\, dt = 2\int (t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 2t + 2)\, dt = \int (2t^3 - 7t^2 + 4t + 4)\, dt$
$= 2\frac{t^4}{4} - 7\frac{t^3}{3} + 4\frac{t^2}{2} + 4t + C = \boxed{\frac{t^4}{2} - \frac{7}{3}t^3 + 2t^2 + 4t + C.}$

(c) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{cotgx} - \frac{\pi}{2\cos x}\right)$

Solução . $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x\text{sen}x}{\cos x} - \frac{\pi}{2\cos x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2x\text{sen}x - \pi}{2\cos x}\right)$

$$(\textbf{L'Hôpital}) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2\text{sen}x + x\cos x}{-2\text{sen}x}\right) = \frac{2}{-2} = \boxed{-1}.$$

(d) $\lim_{x\to 0} x^{3/(x^4+\ln x)}.$

Solução . $y = x^{3/(x^4+\ln x)} \Rightarrow \ln y = \frac{3}{x^4 + \ln x}\ln x.$

$$\overset{\textbf{L'Hôpital}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{3\ln x}{x^4 + \ln x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{x}}{4x^3 + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{4x^4 + 1} = 3.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} e^{\ln y} = e^{\lim_{x\to 0} \ln y} = \boxed{e^3.}$$

2ª questão. (8 pontos) Ache o domínio, máximos e mínimos, pontos de inflexão, concavidade, assíntotas e trace o gráfico de $f(t) = \frac{t^2 + 9}{(t-3)^2}$.

Solução. (Usando o procedimento da aluna Júlia Hott para as derivadas)

Domínio: $t \neq 3$. **Assíntota vertical** $t = 3$:

$$\lim_{x\to 3} \frac{t^2+9}{(t-3)^2} = +\infty$$

Assíntota horizontal $y = 1$:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{t^2+9}{(t-3)^2} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1+\frac{9}{t^2}}{1-\frac{6}{t}+\frac{9}{t^2}} = \frac{1}{1} = 1 = \lim_{x\to \infty} \frac{t^2+9}{(t-3)^2}.$$

Derivadas: (Fazendo u=t-3)

$$f(t) = \frac{t^2+9}{u^2} \Rightarrow f'(t) = \frac{u^2(2t)-(t^2+9)2uu'}{u^4}$$

$$f'(t) = \frac{(t-3)(2t)-2(t^2+9)u'}{u^3} = \frac{u(2t)-2(t^2+9)}{(t-3)^3} = \frac{-6t-18}{(t-3)^3} = \frac{-6t-18}{u^3}.$$

$$f''(t) = \frac{u^3(-6)-(-6t-18)3u^2u'}{u^6} = \frac{u(-6)-(-6t-18)3uu'}{u^4} = \frac{(t-3)(-6)+(6t+18)3}{(t-3)^4}$$

$$f''(t) = \frac{12(t+6)}{(t-3)^4}.$$

Pontos críticos: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -6t-18 = 0 \Leftrightarrow \boxed{t = -3}$

$$f''(-3) = \frac{12(3)}{(-6)^4} = \frac{1}{36} > 0 \Rightarrow t = -3 \text{ **é mínimo.**}$$

Concavidade: Temos que $12(t+6)$ **junto com** $f''(t)$ **mudam de sinal de negativo para positivo em** $t = -6$. **Portanto** $f(t)$ **é côncavo para baixo em** $(-\infty, -6)$ **,** $f(t)$ **é côncavo para cima em** $(-6, \infty) \Rightarrow$ $\boxed{t = -6 \text{ é ponto de inflexão de } f(t).}$

VALORES DE f(t)							
t	$-\infty$	-6	-3	0	3	4	$+\infty$
f(t)	1	5/9	1/2	1	$+\infty$	25	1

estão. (8 pontos) Um fazendeiro deve cercar dois pastos retangulares, cada um deles com lados a **e** b**, com um lado comum** a. **Se cada pasto deve medir** $400m^2$ **de área, determinar as dimensões** a **e** b **de maneira que o comprimento da cerca seja mínimo.**

Solução. $C =$ **comprimento da cerca,** $A =$ **área de um pasto.**

Função: $C = 3a + 4b$

Condição: $A = ab = 400 \Rightarrow b = \dfrac{400}{a}$

$$C(a) = 3a + \frac{1600}{a,\ a > 0.}$$

$C'(a) = 3 - \dfrac{1600}{a^2} = 0 \Rightarrow 3 = \dfrac{1600}{a^2} \Rightarrow a^2 = \dfrac{1600}{3} \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{40}{\sqrt{3}}}$ **é ponto crítico.**

$C''(a) = \dfrac{3200}{a^3} > 0 \Rightarrow C''\left(\dfrac{400}{\sqrt{3}}\right) > 0 \Rightarrow \boxed{a = \dfrac{40}{\sqrt{3}}}$ **é mínimo.**

Resp: Dimensões: $\boxed{a = \dfrac{40}{\sqrt{3}}, \quad b = 10\sqrt{3}.}$

2. **4ª questão. (8 pontos)] Acumula-se areia em um monte com a forma de um cone onde a altura é igual ao raio da base. Se o volume de areia cresce a uma taxa de** $10m^3/h$, **a que razão aumenta a área da base quando a altura é de** $4m$?

Solução. $r =$ **raio do cone,** $V =$ **volume do cone,** $A =$ **área da base do cone.**

$$V = \frac{1}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{9\pi}V^{1/3}$$

$$\Rightarrow A = \pi r^2 = \pi\left(\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}V^{1/3}\right)^2 = \sqrt[3]{9\pi}V^{2/3}$$

$$\frac{dA}{dt} = \sqrt[3]{9\pi}\left(\frac{2}{3}\right)V^{-1/3}.\frac{dV}{dt} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9\pi}{V}}.\frac{dV}{dt}$$

Quando $r = 4,\ V = \dfrac{64\pi}{3,\ \dfrac{dV}{dt}} = 10$ **e**

$$\frac{dA}{dt} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{9\pi}{\frac{64\pi}{3}}} = \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{27}{64}}.10 = \frac{2}{3}\frac{3}{4}.10 = 5$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = 5m^2/hora.}$$