Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas – ICEx
Departamento de Matemática

Cálculo I

1º Semestre de 2008 – Resolução da 3ª Prova - 25/06/2008

1ª questão. (7 pontos) Calcule a área limitada pelas curvas $x = y^3 - y$ e $x = 3y$.

Solução. Pontos de interseção: $y^3 - y = 3y \Leftrightarrow y^3 - 4y = 0 \Leftrightarrow y(y^2 - 4) = 0$

$\Leftrightarrow y = -2,\ y = 0$ ou $y = 2$.

Colocando x em função de y as funções são: $x = f(y) = 3y,\ x = g(y) = y^3 - y$ e a área pedida é:

$$A = \int_{-2}^{0} (g(y) - f(y))\, dy + \int_{0}^{2} (f(y) - g(y))\, dy$$

$$A = \int_{-2}^{0} (y^3 - y - 3y)\, dy + \int_{0}^{2} (3y - y^3 + y)\, dy$$

$$A = \int_{-2}^{0} (y^3 - 4y)\, dy + \int_{0}^{2} (4y - y^3)\, dy$$

$$A = \left(\frac{y^4}{4} - 2y^2)\Big|_{-2}^{0} + (\frac{-y^4}{4} + 2y^2\right)\Bigg|_{0}^{2}$$

$$A = \left(-\frac{2^4}{4} + 2.4) - (\frac{(-2)^4}{4} - 2.4\right)$$

$A = -4 + 8 - 4 + 8 = \boxed{8.}$

2ª questão. (10 pontos) Ache o volume gerado pela rotação da região limitada pelas curvas $y = 4x - x^2,\ y = 8x - 2x^2$, ao redor de $x = -2$.

Solução. Pontos de interseção das duas curvas:

$$-2x^2 + 8x = -x^2 + 4x \Leftrightarrow -x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0,\ x = 4.$$

Por cascas cilíndricas, a integral será de 0 até 4. Acima do ponto de abscissa x, temos: Raio da casca$= x+2,\ f(x) = 8x-2x^2,\ g(x) = 4x-x^2$. Altura da casca $=\ f(x)-g(x)$.

$$V = \int_0^4 2\pi(x+2)[(8x - 2x^2) - (4x - x^2)]\, dx.$$

$$V = 2\pi \int_0^4 (x+2)(8x - 2x^2 - 4x + x^2)\, dx.$$

$$V = 2\pi \int_0^4 (x+2)(-x^2 + 4x)\, dx \Rightarrow V = 2\pi \int_0^4 (-x^3 + 4x^2 - 2x^2 + 8x)\, dx$$

$$V = 2\pi \int_0^4 (-x^3 + 2x^2 + 8x)\, dx \Rightarrow V = 2\pi(-\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} + 4x^2)\Big|_0^4$$

$$V = 2\pi(-\frac{4^4}{4} + \frac{2.4^3}{3} + 4.(16))$$

$$V = 2\pi(-64 + 2\frac{64}{3} + 64) \Rightarrow V = \frac{256}{3}\pi.$$

1. **(16 pontos) Calcule**

(a) $I = \displaystyle\int \frac{1}{(4+x^2)^2}\, dx.$

Solução . $x = 2tg\theta,\ dx = 2\sec^2\theta\, d\theta.$

$$I = \int \frac{1}{(4+4tg^2\theta)^2} 2\sec^2\theta\, d\theta = \int \frac{1}{16(1+tg^2\theta)^2} 2\sec^2\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\, d\theta = \frac{1}{8}\int \frac{1}{\sec^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{8}\int \cos^2\theta\, d\theta$$

$= \dfrac{1}{8}\displaystyle\int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{1}{16}(\theta + \frac{\text{sen}2\theta}{2}) + C = \frac{1}{16}\theta + \frac{1}{16}\text{sen}\theta\cos\theta + C.$ **Como** $tg\theta = \dfrac{x}{2}$, **então** $\text{sen}\theta = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}},\ \cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{4+x^2}},$ **e**

$$I = \int \frac{1}{(4+x^2)^2}\, dx = \frac{1}{16}arctg\frac{x}{2} + \frac{1}{16}\frac{2x}{4+x^2} + C$$

$$\boxed{I = \frac{1}{16}arctg\frac{x}{2} + \frac{1}{8}\frac{x}{4+x^2} + C}$$

(b) $I = \displaystyle\int_1^\infty x^2 e^{-3x}\, dx.$

Solução . Por partes, $u = x^2,\ dv = e^{-3x},\ du = 2xdx,\ v = \dfrac{-e^{-3x}}{3}$

$$\int x^2 e^{-3x}\, dx = \frac{-x^2 e^{-3x}}{3} + \int \frac{2x}{3} e^{-3x}\, dx.$$

De novo por partes, $U = \dfrac{2x}{3},\ dV = e^{-3x},\ dU = \dfrac{2}{3}dx,\ V = \dfrac{-e^{-3x}}{3},$ **e**

$\displaystyle\int \frac{2x}{3} e^{-3x}\, dx = \frac{-2x}{9}e^{-3x} + \frac{2}{9}\int e^{-3x}\, dx = \frac{-2x}{9}e^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x}$

Substituindo na 1ª integral

$$\int x^2 e^{-3x}\, dx = \frac{-x^2 e^{-3x}}{3} + \frac{-2x}{9}e^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x}.$$

Portanto

$$I = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^2 e^{-3x}\, dx = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-x^2 e^{-3x}}{3} + \frac{-2x}{9}e^{-3x} - \frac{2}{27}e^{-3x}\right)\Bigg|_1^t$$

$$I = \lim_{t\to\infty}\left(\underbrace{\frac{-t^2}{3e^{3t}} + \frac{-2t}{9e^{3t}}}_{\textbf{L'Hôpital}} - \frac{2}{27e^{3t}}\right) - \left(\frac{-1}{3e^3} - \frac{2}{9e^3} - \frac{2}{27e^3}\right)$$

$$I = \lim_{t\to\infty}\left(\underbrace{\frac{-2t}{9e^{3t}}}_{\textbf{L'Hôpital}} + \frac{-1}{27e^{3t}} - \frac{2}{27e^{3t}}\right) - \left(\frac{-1}{3e^3} - \frac{2}{9e^3} - \frac{2}{27e^3}\right)$$

$$I = (\ 0 + 0 + 0\ ) - \left(\frac{-1}{3e^3} - \frac{2}{9e^3} - \frac{2}{27e^3}\right) \Rightarrow \boxed{I = \frac{17}{27e^3}}$$

(c) $I = \displaystyle\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2}\, dx.$

Solução . Por frações parciais:

$$\frac{1 - x + 2x^2 - x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

$$-x^3 + 2x^2 - x + 1 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)x(x^2+1) + (Dx+E)x$$

$$\begin{array}{r} x^4:\ A + B = 0 \\ x^3:\ C = -1 \\ x^2: 2A + B + D = 2 \\ x:\ C + E = -1 \\ 1:\ A = 1 \end{array} \implies \begin{array}{c} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -1 \\ D = 1 \\ E = 0 \end{array}$$

Voltando à integral:

$$I = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{(-)x + (-1)}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2} dx \right.$$

$$I = \int \frac{1}{x}\, dx + \int \frac{-1}{x^2+1}\, dx + \int \frac{-x}{x^2+1}\, dx + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx$$

$$I = ln|x| - \frac{1}{2} ln(x^2+1) - arctgx - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}$$

onde as duas últimas integrais saem pela substituição $u = x^2 + 1,\ du = 2xdx.$

(d) $I = \displaystyle\int_{1/3}^{3} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + x}\, dx.$ **(Sugestão: Faça** $u = \sqrt{x}$**.)**

Solução . $u = \sqrt{x} \Rightarrow u^2 = x \Rightarrow 2udu = dx.$ **Logo** $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+x}\, dx = \int \frac{u}{u^4 + u^2} 2udu = \int 2\frac{1}{u^2+1}\, du = 2 \arctan u = 2 \arctan \sqrt{x}.$ **Donde**

$$I = 2 \arctan \sqrt{x} \Big|_{1/3}^{3} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{3}}.$$