Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas – ICEx
Departamento de Matemática

Cálculo I

1º Semestre de 2008 – Resolução da Prova Suplementar - 25/06/2008

1. **(7 pontos)** Ache a equação da reta tangente à lemniscata:

$$2(x^2+y^2)^2 = 25(x^2-y^2)$$

no ponto $(3,1)$.

Solução. Derivando implicitamente a equação da lemniscata em relação a x : (considerando y como função de x)

$$(2(x^2+y^2)^2)' = (25(x^2-y^2))'$$
$$2.2(x^2+y^2)(2x+2yy') = 25(2x-2yy')$$
$$2(x^2+y^2)(2x+2yy') = 25(x-yy')$$
$$4x^3+4x^2yy'+4y^2x+4y^3y' = 25x-25yy'$$
$$4x^2yy'+4y^3y'+25yy' = 25x-4x^3-4y^2x$$
$$y'(4x^2y+4y^3+25y) = 25x-4x^3-4y^2x$$
$$y' = \frac{25x-4x^3-4y^2x}{4x^2y+4y^3+25y}$$

No ponto $(3,1)$: $m = y' = \dfrac{25.3-4.1^3-4.1^2.3}{4.3^2.1+4.1^3+25.1} \Rightarrow m = \dfrac{-108-12+75}{36+4+25} = \dfrac{-45}{65}$ $\Rightarrow \boxed{m = -\dfrac{9}{13}}$.

Equação da reta tangente à lemniscata no ponto $(3,1)$:

$y-1 = -\dfrac{9}{13}.(x-3) \Rightarrow y = -\dfrac{9}{13}x+\dfrac{27}{13}+1 \Rightarrow \boxed{y = -\dfrac{9}{13}x+\dfrac{40}{13}}$

2. **(7 pontos)** Uma caixa com base quadrada e sem tampa tem um volume de $32.000cm^3$. Encontre as dimensões da caixa que minimizem a quantidade de material usado.

Solução. x =lado da base, y = altura, A =área, V =volume da caixa = x^2y.

$V = 32.000cm^3 \Rightarrow x^2y = 32.000 \Rightarrow y = \dfrac{32.000}{x^2}$

$A = x^2+4xy \Rightarrow A = x^2+4x\dfrac{32.000}{x^2} \Rightarrow A(x) = x^2+\dfrac{128.000}{x}$ e vamos minimizar $A(x)$.

$A'(x) = 2x-\dfrac{128.000}{x^2} \Rightarrow A'(x) = \dfrac{2x^3-128.000}{x^2}$

Pontos críticos:

$A'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3-128.000 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 = 128.000 \Leftrightarrow x^3 = 64.000$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 40}$ é o único ponto crítico de A.

$$y = \frac{32.000}{40.40} \Rightarrow y = \frac{32.000}{1.600} \Rightarrow \boxed{y = 20}$$

Teste do mínimo para o ponto crítico $x = 40$: $A''(x) = 2 + \dfrac{256.000}{x^3} > 0, \ \forall x > 0 \Rightarrow$ $A''(40) > 0 \Rightarrow \boxed{x = 40 \text{ é mínimo}}$.

As dimensões da caixa com quantidade mínima de material usado são

$\boxed{x = \text{lado da base} = 40cm, \ \ y = \text{altura} = 20cm}$.

3. **(7 pontos)** Ache o volume gerado pela rotação da região limitada pelas curvas $y = \sqrt{x-1}, \ y = 0, \ x = 5$ ao redor de $y = 3$.

Solução. Pontos de interseção das duas curvas: $y = \sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow x = 1$

$$V = \int_1^5 \pi((\text{raio maior})^2 - (\text{raio menor})^2)\, dx.$$

$$V = \pi \int_1^5 ((3)^2 - (3 - \sqrt{x-1})^2)\, dx \Rightarrow = \pi \int_1^5 (6\sqrt{x-1}) - x + 1)\, dx$$

$$V = \pi \left(4(x-1)^{3/2} - \frac{x^2}{2} + x \right) \Bigg|_1^5 = \pi \left(\left(4(4)^{3/2} - \frac{25}{2} + 5 \right) - \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) \right)$$

$$V = \pi \left(37 - \frac{25}{2} - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \boxed{V = 24\pi}.$$

4. **(16 pontos) Calcule**

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}\, dx$. **(Sugestão: Substitua** $u = \sqrt[12]{x}$**).**

Solução . $u = \sqrt[12]{x} \Rightarrow x = u^{12} \Rightarrow dx = 12u^{11} du.$

Também $x = u^{12} \Rightarrow \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{u^{12}} = u^4, \ \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{u^{12}} = u^3.$

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}\, dx = \int \frac{12}{u^4 + u^3}\, u^{11}\, du = \int \frac{12}{u+1} u^8\, du = \int \frac{12}{u+1}(u^8 - 1 + 1)\, du =$$

$$= 12 \int \left(\frac{u^8 - 1}{u+1} + \frac{1}{u+1} \right) du \ 12 \int (u^7 - u^6 + u^5 - u^4 + u^3 - u^2 + u - 1) + \frac{1}{u+1}\, du =$$

$$\frac{u^8}{8} - \frac{u^7}{7} + \frac{u^6}{6} - \frac{u^5}{5} + \frac{u^4}{4} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} - u + ln|u+1| + C$$

$$= \frac{x^{8/12}}{8} - \frac{x^{7/12}}{7} + \frac{x^{6/12}}{6} - \frac{x^{5/12}}{5} + \frac{x^{4/12}}{4} - \frac{x^{3/12}}{3} + \frac{x^{2/12}}{2} - x^{1/12} + ln(x^{1/12} + 1) + C.$$

(b) $I = \displaystyle\int_0^1 2\pi x arctgx\, dx.$

Solução . Por partes, $u = arctgx, \ dv = x, \ du = \dfrac{1}{x^2+1}dx, \ v = \dfrac{x^2}{2}$

$$\int x arctgx\, dx = \frac{x^2 arctgx}{2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1}\, dx.$$

$$= \frac{x^2 arctgx}{2} - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx.$$

$$= \frac{arctgx}{x^2+1} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}arctgx = \frac{(x^2+1)arctgx}{2} - \frac{x}{2}$$

Portanto, $I = 2\pi \int_0^1 xarctgx\, dx = \left(\frac{(x^2+1)arctgx}{2} - \frac{x}{2}\right)\Big]_0^1$

$$I = 2\pi\left(\left(\frac{(1^2+1)arctg1}{2} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{(0^2+1)arctg0}{2} - \frac{0}{2}\right)\right)$$

$$I = 2\pi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\left(\frac{1}{2}\pi^2 - \pi\right).}$$

(c) $\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\, dx.$

Solução . Como $\frac{1}{(x-1)^{4/3}}$ **tem uma descontinuidade infinita em** $x = 1$, **a integral é imprópria:**

$$\int_0^2 \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\, dx + \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\, dx,$$

Devemos ver se as integrais convergem ou divergem. A primeira integral é

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\, dx = \lim_{t\to 1^-} \int_0^t \frac{1}{(x-1)^{4/3}}\, dx$$

$$= \lim_{t\to 1^-} \int_0^t (x-1)^{-4/3}\, dx \ = \lim_{t\to 1^-}(3)(1-x)^{-1/3}\Big]_0^t = \lim_{t\to 1^-} \frac{3}{\sqrt[3]{1-x}}\Big]_0^t =$$

$$\lim_{t\to 1^-}\left(\frac{3}{\sqrt[3]{1-t}} - \frac{3}{\sqrt[3]{1-0}}\right) = \infty$$

$\Rightarrow$ **A integral imprópria diverge.**

OBS. Usamos uma substituição $u = 1-x, du = -dx$ **para calcular**

$$\int (x-1)^{-4/3} = \int (1-x)^{-4/3}\, dx = -\int (u)^{-4/3}\, du \ -(-3)u^{-1/3} = 3(1-x)^{-1/3}.$$

(d) $\int_0^{2/3} x^3\sqrt{4-9x^2}\, dx.$

Solução . Por substituição trigonométrica,

$x = \frac{2}{3}\text{sen}\theta \Rightarrow dx = \frac{2}{3}\cos\theta,$

$\sqrt{4-9x^2} = \sqrt{4-4\text{sen}^2\theta} = 2\cos\theta,\ x = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$. **Portanto**

$$\int_0^{2/3} x^3\sqrt{4-9x^2}\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{8}{27}\text{sen}^3\theta(2\cos\theta)\frac{2}{3}\cos\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{16}{81}\text{sen}^2\theta(2\cos^2\theta)\text{sen}\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{16}{81}(1-\cos^2\theta)(2\cos^2\theta)\text{sen}\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{32}{81}(\cos^2\theta - \cos^4\theta)\text{sen}\theta\, d\theta$$

$$= \frac{32}{81}\int_1^0 (u^2-u^4)\,(-du) = \frac{32}{81}\int_0^1 (u^2-u^4)\, du$$

(a última integral foi feita com a substituição $u = \cos\theta,\ du = -\text{sen}\theta d\theta$.)

$$= \frac{32}{81}\left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5}\right)\Big]_0^1 = \frac{32}{81}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \left(\frac{32}{81}\right)\left(\frac{2}{15}\right) = \boxed{\frac{64}{1215}}.$$