DM–IMECC–UNICAMP – Geometria Analítica e Vetores - MA141 - T. Z
Prof. Marcelo M. Santos – **3a. prova, 28/06/2010**

Aluno: ______________________________ RA: ____________

Assinatura (idêntica à do RG): ___________________________________

Observações: ***Justifique sucintamente todas as suas afirmações. É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico; em particular do celular ou calculadora. Desligar o celular! Não destaque o grampo da prova. Cada questão vale 2,5 pontos.***

Questão 1. a) (1,0 ponto). Dados os vetores

$$U_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \quad U_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1),$$

no plano com coordenadas cartesianas xy, considere também o sistema de coordenadas cartesianas $x'y'$ com os vetores diretores U_1 e U_2. Dê as relações entre as coordenadas (x,y) e (x',y') de um ponto qualquer do plano. Justifique brevemente que o sistema $x'y'$ pode ser obtido do sistema xy por uma rotação do ângulo de 45° no sentido anti-horário.

b) (1,5 pontos). Escreva a equação quadrática $2xy = 25$ na forma matricial $X^tAX + KX + f = 0$ e faça a mudança de coordenadas $X = QX'$, onde $Q = [U_1\ U_2]$ é a matriz 2×2 cujas colunas são dadas pelos vetores U_1, U_2 no item **a)**. Identifique a cônica descrita por esta equação e faça um esboço do seu gráfico, indicando os seus vértices, polos e uma (reta) diretriz. (*Este item pode ser resolvido sem resolver o item a)*.)

2. Escreva a equação da cônica $x^2 - y^2 = 25$ (x, y são coordenadas cartesianas) em coordenadas polares, numa das formas canônicas

$$r = de/(1 \pm e\cos\theta),\ r = de/(1 \pm e\,\mathrm{sen}\theta).$$

Dica: Escolha as coordenadas polares com polo num foco.

3. a) (0,5 pontos). Verifique que os vetores $U_1 = (1,0,0)$, $U_2 = (0,-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ e $U_3 = (0,-1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$ são ortonormais (são unitários e dois a dois ortogonais) e autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(mais precisamente, $AU_1 = U_1$, $AU_2 = U_2$ e $AU_3 = -U_3$).

b) (1,0 ponto). Escreva a equação $x^2 = 2yz$ na forma

$$ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + dx' + ey' + fz' + g = 0$$

(sem “termos cruzados” $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$) num sistema de coordenadas cartesianas $x'y'z'$. <u>Dica</u>: Pode usar o item a), sem resolvê-lo.

c) (1,0 ponto). Escreva a equação $x^2 = 2yz$ em coordenadas esféricas.

4. Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações.

Boa prova!

Gabarito

Questão 1. a) (1,0 ponto). *Dados os vetores*

$$U_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1), \quad U_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1),$$

no plano com coordenadas cartesianas xy, considere também o sistema de coordenadas cartesianas $x'y'$ com os vetores diretores U_1 e U_2. Dê as relações entre as coordenadas (x,y) e (x',y') de um ponto qualquer do plano. Justifique brevemente que o sistema $x'y'$ pode ser obtido do sistema xy por uma rotação do ângulo de $45°$ no sentido anti-horário.

Escrevendo $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, as relações entre as coordenadas é dada por

$$X = QX', \quad Q = [U_1\ U_2] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = & \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y') \\ y = & \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y') \end{cases}$$

0,7 pontos até aqui.

Escrevendo os vetores U_1, U_2 em coordenadas polares, temos $U_1 = (1, 45°)$, $U_2 = (1, 45°{+}90°)$, logo, eles podem ser obtidos dos vetores diretores canônicos $(1,0)$, $(0,1)$ do sistema xy por uma rotação do ângulo de $45°$ no sentido anti-horário.

+ 0,3 pontos

b) (1,5 pontos). *Escreva a equação quadrática $2xy = 25$ na forma matricial $X^tAX + KX + f = 0$ e faça a mudança de coordenadas $X = QX'$, onde $Q = [U_1\ U_2]$ é a matriz 2×2 cujas colunas são dadas pelos vetores*

U_1, U_2 no item **a)**. *Identifique a cônica descrita por esta equação e faça um esboço do seu gráfico, indicando os seus vértices, polos e uma (reta) diretriz.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f = -25$$

0,2 pontos

$$X^tAX + KX + f = 0$$
$$(QX')^tA(QX') + K(QX') = 25$$
$$X'(Q^tAQ)X' + (KQ)X' = 25,$$

$$\begin{aligned} Q^tAQ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$KQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix};$$

logo, temos a equação

$$x'^2 - y'^2 = 25 \quad - \quad \text{equação de uma hipérbole.}$$

+ **0,3**

<u>Vértices</u>: $y' = 0 \Rightarrow x' = \pm 5$, logo, os vértices são os pontos de coordenadas $(\pm 5, 0)$ no sistema $x'y'$. No sistema xy, temos:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= Q \begin{bmatrix} \pm 5 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \pm 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \pm \tfrac{5}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\equiv \pm \left(\tfrac{5}{\sqrt{2}}, \tfrac{5}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

+ **0,3**

<u>Focos</u>: $a^2 = b^2 = 25$, $b^2 = c^2 - a^2 \therefore c^2 = a^2 + b^2 = 2 \times 25$, $c = 5\sqrt{2}$. Logo os focos são $(\pm c, 0) = (\pm 5\sqrt{2}, 0)$, nas coordenadas $x'y'$. + **0,2**

<u>Diretriz</u>: Uma reta diretriz é dada pela equação $x' = c/e^2$, onde $e = c/a = 5\sqrt{2}/5 = \sqrt{2}$ (a excentricidade), i.e. $x' = 5/(2\sqrt{2}) = (5/4)\sqrt{2}$. + **0,2**

+ **0,3** pelo gráfico.

Questão 2. *Escreva a equação da cônica $x^2 - y^2 = 25$ (x, y são coordenadas cartesianas) em coordenadas polares, numa das formas canônicas*

$$r = de/(1 \pm e\cos\theta),\ r = de/(1 \pm e\, sen\theta).$$

Dica: *Escolha as coordenadas polares com polo num foco.*

Focos: $a^2 = b^2 = 25$, $b^2 = c^2 - a^2 \therefore c^2 = a^2 + b^2 = 2 \times 25$, $c = 5\sqrt{2}$. Logo os focos são $(\pm c, 0) = (\pm 5\sqrt{2}, 0)$. (Quem fez a Questão 1, pode usar o resultado aqui, e reciprocamente.) **0,5**

Excentricidade: $e = c/a = 5\sqrt{2}/5 = \sqrt{2}$. + **0,5**

Diretriz: Uma reta diretriz é dada pela equação $x = 5/(2\sqrt{2}) = (5/4)\sqrt{2}$. + **0,5**

Escolhendo as coordenadas polares com polo no foco $(5\sqrt{2}, 0)$ e eixo polar contido no eixo x, a diretriz acima fica à esquerda do polo e perpendicular ao eixo polar, logo a equação em coordenadas polares é

$$r = \frac{de}{1 - e\cos\theta} = \frac{\left(5\sqrt{2} - (5/4)\sqrt{2}\right)\sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}\cos\theta}$$
$$r = \frac{15/2}{1 - \sqrt{2}\cos\theta}$$

+ **1,0**

Questão 3. a) (0,5 pontos). *Verifique que os vetores* $U_1 = (1,0,0)$ $U_2 = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ *e* $U_3 = (0, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ *são ortonormais (são unitários e dois a dois ortogonais) e autovalores da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(mais precisamente, $AU_1 = U_1$, $AU_2 = U_2$ *e* $AU_3 = -U_3$*).*

Verificação de que os vetore são ortonormais: **0,2 pontos**.

Verificação de que os vetore são autovetores: + **0,3 pontos**.

b) (1,0 ponto). *Escreva a equação* $x^2 = 2yz$ *na forma*

$$ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + dx' + ey' + fz' + g = 0$$

(sem "termos cruzados" $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$*) num sistema de coordenadas cartesianas* $x'y'z'$*.* Dica: *Pode usar o item a), sem resolvê-lo.*

Em notação matricial, a equação $x^2 = 2yz$ se escreve como $X^tAX = 0$, onde A é a matriz no item a) e $X^t = [x\, y\, z]$. **0,3 pontos**.

Pelo item a), os vetores $U_1 = (1,0,0)$ $U_2 = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $U_3 = (0, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ são autovetores ortonormais da matriz A ($AU_1 = U_1$, $AU_2 = U_2$, $AU_3 = -U_3$) logo, tomando a matriz $Q = [U_1\, U_2\, U_3]$ temos que Q^tAQ é a matriz diagonal com elementos $1, 1, -1$ na diagonal principal

($AU_1 = 1\,U_1$, $AU_2 = 1\,U_2$, $AU_3 = -1\,U_3$) e, fazendo a mudança de variáveis $X = QX'$, $X'^t = [x'\,y'\,z']$, obtemos a equação

$$x'^2 + y'^2 - z'^2 = 0.$$

+ 0,7 pontos

c) (1,0 ponto). *Escreva a equação $x^2 = 2yz$ em coordenadas esféricas.*

$$\begin{aligned} x &= r\text{sen}\phi\cos\theta \\ x &= r\text{sen}\phi\,\text{sen}\theta \\ z &= r\cos\phi \end{aligned}$$

+ 0,5 pontos

$$\begin{aligned} (r\text{sen}\phi\cos\theta)^2 &= 2(r\text{sen}\phi\text{sen}\theta)r\cos\phi \\ \text{sen}^2\phi\cos^2\theta &= 2\text{sen}\phi\text{sen}\theta\cos\phi \end{aligned}$$

+ 0,5

Questão 4. *Identifique a quádrica $y^2 - x^2 - z^2 = 1$ (dê o seu nome) e faça um esboço do seu gráfico. Determine as interseções com os eixos e com os planos coordenados.*

Um hiperbolóide de duas folhas com 'eixo' y. **0,5**

Esboço do gráfico, correto e com alguns dados: **+1,0**

Interseções com os eixos:

- com o eixo x ($y = z = 0$): $-x^2 = 1$, não há (conjunto vazio);
- com o eixo y ($x = z = 0$): $y^2 = 1$, os pontos $(0, \pm 1, 0)$;
- com o eixo z ($x = y = 0$): $-z^2 = 1$, não há (conjunto vazio).

+0,5

Interseções com os planos coordenados:

- com o plano xy ($z = 0$): $y^2 - x^2 = 1$, uma hipérbole;
- com o eixo xz ($y = 0$): $-x^2 - z^2 = 1$, não há (conjunto vazio);
- com o eixo yz ($x = 0$): $y^2 - z^2 = 1$, uma hipérbole.

+0,5

Questão 5. *Encontre os valores de k tais que a interseção do plano $x + ky = 1$ com a quádrica $y^2 - x^2 - z^2 = 1$ seja uma elipse.*

Substituindo $x = 1 - ky$ na equação da quádrica, temos:

$$\begin{array}{rl}
y^2 - (1-ky)^2 - z^2 & = 1 \\
(1-k^2)y^2 + 2ky - z^2 & = 2 \\
 & \textbf{0,5 pontos} \text{ até aqui.} \\
k = \pm 1 : \ \pm 2y - z^2 = 2 & \text{uma parábola;} \\
k \neq \pm 1 : \qquad\qquad & \text{completando os quadrados,} \\
 & + \ \mathbf{0{,}5} \\
(1-k^2)\left(y^2 + 2\frac{k}{1-k^2} + (\frac{k}{1-k^2})^2\right) - z^2 & = 2 + \frac{k^2}{1-k^2} \\
(1-k^2)\left(y^2 + \frac{k}{1-k^2}\right)^2 - z^2 & = \frac{2-k^2}{1-k^2}.
\end{array}$$

+ 1,0

Daí, para termos uma elipse vemos que $1 - k^2$ e $\frac{2-k^2}{1-k^2}$ precisam ser negativos, i.e. $1 - k^2 < 0$ e $2 - k^2 > 0$, logo,

$$1 < |k| < \sqrt{2}.$$

+ 0,5