DM–IMECC–UNICAMP – Geometria Analítica e Vetores - MA141 - T. Z
Prof. Marcelo M. Santos – **1a. prova, 05/04/2010**
Aluno: ____________________________ RA: ___________
Assinatura (idêntica à do RG): ______________________________

Observações: *Tempo de prova: 100min. Justifique sucintamente todas as suas afirmações.* ***É proibido o uso de qualquer equipamento eletrônico; em particular do celular ou calculadora. Desligar o celular! Cada questão vale 2,5 pontos.***

Questão 1. **Usando o método de escalonamento de Gauss-Jordan**, resolva o sistema abaixo e descreva (matematicamente) o seu conjunto solução:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + 2z &= 6 \end{cases}.$$

Exiba a forma escalonada reduzida da matriz ampliada do sistema.

2. **Usando o processo de linha equivalência (escalonamento)**, calcule a inversa da matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$ (quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$).

3. a) (1,25 pontos) Sejam A e B matrizes diagonais (i.e. elementos de posição ij com $i \neq j$ são nulos) de ordem $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}$ arbitrário). Mostre (prove) que o produto AB também é uma matriz diagonal e exiba o elemento $[AB]_{ii}$ em termos dos elementos de A e B, para $i \in \{1, \cdots, n\}$ qualquer.

b) (1,25 pontos) Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz diagonal $n \times n$ ($n \in \mathbb{N}$ qualquer) com $a_{ii} \neq a_{jj}$ sempre que $i \neq j$. Dada uma matriz B de ordem $n \times n$ arbitrária, prove que $AB = BA$ se, e somente se, B também é uma matriz diagonal.

4. Uma matriz é dita *elementar* se é obtida da matriz Identidade por uma (única) operação elementar sobre as linhas da matriz Identidade. Denota-se por $E_{i,j}$, $E_i(\alpha)$ e $E_{i,j}(\alpha)$ as matrizes obtidas da Identidade respectivamente da seguinte maneira: permutando-se a linha i com a linha j, multiplicando-se a linha i pelo escalar não nulo α e adicionando-se à linha j a linha i multiplicada por α. **Usando as propriedades (os teoremas e similares) do determinante e da inversa vistas em aula**, mostre que

a) (1,0 ponto) $\det E_{i,j} = -1$, $\det E_i(\alpha) = \alpha$ e $\det E_{i,j}(\alpha) = 1$;

b) (1,5 pontos) $E_{i,j}$, $E_i(\alpha)$ e $E_{i,j}(\alpha)$ são matrizes invertíveis e determine as suas inversas.

Não se esqueça de justificar todas as suas afirmações. **Boa prova!**