4ª Prova de MA211/A/B (03/12/2010)

RA: _______ Nome: GABARITO

Turma: ___

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
Total	

1. (2,5 pontos) Considere o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = (2xyz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$ e a curva $\gamma(t) = (sen^6 t, 1-\cos t, e^{t(t-\pi/2)})$, $0 \le t \le \pi/2$. Calcule a integral de linha

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma$$

do campo vetorial $\vec{F}$ sobre a curva γ. (**Sugestão:** verifique se o campo é conservativo.)

2. (2,5 pontos) Use o Teorema de Green para determinar a área da região limitada pela curva $\alpha(t) = (\cos t, sen^3 t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

3. (2,5 pontos) Determine o fluxo do campo vetorial

$$\vec{F}(x,y,z) = (x \operatorname{sen} x + ze^{y^2+z^2})\vec{i} + (x^2z^2 \ln(1+x^2+z^4))\vec{j} + (-z(\operatorname{sen} x + x\cos x) + x^2 + y^2)\vec{k}$$

através da superfície $x^2+y^2+z^{7/2}=1$, $z \ge 0$, e na direção do vetor normal unitário que aponta para cima (isto é, a terceira coordenada do vetor normal é positiva). (**Sugestão:** usar o Teorema da Divergência)

4. (2,5 pontos) Considere o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = (e^{xy}\cos z, (x^2+1)z, -y)$ e *seja* σ a superfície $x^2+y^2+z^2=1$, $x \ge 0$, orientada na direção positiva do eixo x (isto é, o vetor normal tem a primeira coordenada positiva). Calcule a integral de superfície

$$\iint_\sigma (\text{rot } \vec{F}) \cdot \vec{\mathbf{n}}\, dS$$

(**Sugestão:** use o Teorema de Stokes)

1) $\vec{F}(x,y,z) = (2xyz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xyz^3 & x^2z^3 & 3x^2yz^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (3x^2z^2 - 3x^2z^2, 6xyz^2 - 6xyz^2, 2xz^3 - 2xz^3) = \vec{0}$$

$\Longrightarrow$ o campo $\vec{F}$ é conservativo

0,5

$\vec{F} = \nabla f$ onde $f(x,y,z) = x^2yz^3$

1,0

Ponto final e inicial da curva:

$\gamma(0) = (0,0,1) = A$

$\gamma(\pi/2) = (1,1,1) = B$

Então pelo Teorema Fundamental

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = f(B) - f(A) = 1 - 0 = 1$$

1,0

2) Usando o Teorema de Green obtemos que

$$\text{Área} = \int_\gamma x\,dy = -\int_\gamma y\,dx$$

0,5

$$\gamma(t) = (\cos t,\ \text{sen}^3 t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

$$\text{Área} = \int_0^{2\pi} \cos t\,(3\,\text{sen}^2 t \cos t)\,dt = 3\int_0^{2\pi} (\cos t\ \text{sen}\, t)^2\,dt.$$

0,5

$$= 3\int_0^{2\pi} \left(\frac{\text{sen}\,2t}{2}\right)^2 dt$$

$$\begin{cases} \cos 4t = \cos^2 2t - \text{sen}^2 2t \\ \qquad\ = 1 - 2\,\text{sen}^2 2t \\ \text{sen}^2 2t = \frac{1}{2}(1 - \cos 4t) \end{cases}$$

0,5

$$= \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \text{sen}^2 2t\,dt = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t)\,dt$$

0,5

$$= \frac{3}{8}\left(t - \frac{\text{sen}\,4t}{4}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=2\pi} =$$

$$= \frac{3}{8}\,2\pi = \frac{3\pi}{4}$$

0,5

3) $P = x\,\mathrm{sen}\,x + z e^{y^2+z^2}$, $Q = x^2 z^2 \ln(1+x^2+z^4)$

$R = -z(\mathrm{sen}\,x + x\cos x) + x^2+y^2$

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = (\mathrm{sen}\,x + x\cos x) + 0 - (\mathrm{sen}\,x + x\cos x) = 0$$

0,3

σ_1 = superfície dada

$\sigma_2(u,v) = (u, v, 0)$, $u^2+v^2 \leq 1$

0,3 $\vec{n}(\sigma_2(u,v)) = -\vec{k}$

$\vec{F}(\sigma_2(u,v)) = \vec{F}(u,v,0) = (u\,\mathrm{sen}\,u,\ 0,\ u^2+v^2)$

$\vec{F}(\sigma_2(u,v)) \cdot \vec{n}(\sigma_2(u,v)) = -(u^2+v^2)$, $\left\| \frac{\partial \sigma_2}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma_2}{\partial v} \right\| = 1$

0,3

$$\int_{\sigma_2} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = -\iint_{u^2+v^2\leq 1} (u^2+v^2)\, du\, dv =$$

$$\begin{cases} u^2+v^2 = \rho \\ u = \rho\cos\theta \\ v = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^3\, d\rho\, d\theta = -\frac{2\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

0,8

Aplicando o Teorema da Divergência obtemos

$$\iint_{\sigma_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS + \iint_{\sigma_2} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_B \mathrm{div}\,\vec{F}\, dx\,dy\,dz = 0$$

$$\iint_{\sigma_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = -\iint_{\sigma_2} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \frac{\pi}{2}.$$

0,8

---

4) $\vec{F}(x,y,z) = (e^{xy}\cos z, (x^2+1)z, -y)$

σ : $x^2+y^2+z^2 = 1$, $x \geq 0$

orientação de σ na direção positiva do eixo x

$\gamma(t) = (0, \cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$Im(\gamma) =$ fronteira de σ (orientação positiva)

1,0 $\gamma'(t) = (0, -\operatorname{sen} t, \cos t)$

$\vec{F}(\gamma(t)) = (\cos(\operatorname{sen} t), \operatorname{sen} t, -\cos t)$

0,4 $\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = -\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t = -1$

Pelo Teorema de Stokes:

0,4 $$\iint_\sigma (\text{rot}\,\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma$$

$$= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi$$

0,7