IMECC-UNICAMP MA-211

Nome: ______________________________ RA: ______________

Turma: ____________ 4^a **PROVA** 27/11/2008

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
Total	

2,5 pts. Questão 1:

Seja S a superfície dada por $\overrightarrow{r}(u,v) = u\ cos\ v\ \overrightarrow{i} + u^2\overrightarrow{j} + u\ sen\ v\ \overrightarrow{k}$, com $0 \leqslant u \leqslant 1$ e $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$.

0,5 pts. (a) Identifique e esboce a superfície.

2,0 pts. (b) Calcule a área de S.

2,5 pts. Questão 2: Utilize o Teorema da Divergência para calcular o fluxo do campo vetorial $\overrightarrow{F}$ através da superfície S. Sendo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x^2y\,\overrightarrow{i} + xy^2\,\overrightarrow{j} + (5 - 4xyz)\,\overrightarrow{k}$ e S, a superfície representada pelo hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geqslant 0$. Considere S com orientação para cima (isto é, a normal à superfície, $\overrightarrow{n}$, possui componente z positiva).

2,5 pts. Questão 3: Aplique o Teorema de Stokes para calcular

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r},$$

sendo $\overrightarrow{F}(x,y,z) = 3z\,\overrightarrow{i} + 5x\,\overrightarrow{j} - 2y\,\overrightarrow{k}$ e C, a curva intersecção do plano $z = y + 3$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

2,5 pts. Questão 4: Através do teorema de Stokes calcule o fluxo do rotacional de $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + xyz\,\overrightarrow{k}$, sendo S a superfície dada por $z = 1 - x - y$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ e $x + y \leqslant 1$. Considere S com orientação para baixo.

Respostas não justificadas não serão consideradas. Boa prova!

2,5 pts. Questão 1:

(a) Gráfico do parabolóide $y = x^2 + z^2,\ x^2 + z^2 \leqslant 1.$ 0,5 pts.

(b) $A(S) = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^1 \|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v\|\, dudv = \int_0^{2\pi}\int_0^1 u\sqrt{4u^2+1}\, dudv = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$

1,0 pts. 1,0 pts.

2,5 pts. Questão 2:

Considere $S_1 = D = \{(x,y)|\ x^2+y^2 \leqslant 4\}$ e $E = \{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leqslant 4,\ z \geqslant 0\}$. Pelo Teorema da Divergência,

$$\int\int_S \overrightarrow{F}\cdot d\overline{S} + \int\int_{S_1} \overrightarrow{F}\cdot d\overline{S} = \int\int\int_E div\,\overrightarrow{F}\,dV.$$

Como $div\,\overrightarrow{F} = 0$, resulta

$$\int\int_S \overrightarrow{F}\cdot d\overline{S} = -\int\int_{S_1} \overrightarrow{F}\cdot d\overline{S} = -\int\int_{S_1} \overrightarrow{F}\cdot(-\overrightarrow{k})\,d\overrightarrow{S} = \int\int_D 5\,dA = 20\pi.$$

1,5 pts. 1,0 pts.

2,5 pts. Questão 3:

Seja $g(x,y) = y+3$. A orientação da superfície S, que possui C como fronteira, é dada pela normal

$$\overrightarrow{n} = \frac{1}{\sqrt{g_x^2+g_y^2+1}}(-g_x,-g_y,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1).$$

Como $rot\,\overrightarrow{F} = (-2,3,5)$, pelo Teorema de Stokes,

$$\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int\int_S rot\,\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{n}\ dS = \int\int_S \sqrt{2}\,dS = 2\pi.$$

1,5 pts. 1,0 pts.

2,5 pts. Questão 4:

A fronteira da superfície S é dada por $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, sendo $C_1 : \overrightarrow{r}(t) = (t, 1-t, 0)$, $C_2 : \overrightarrow{r}(t) = (1-t, 0, t)$ e $C_3 : \overrightarrow{r}(t) = (0, t, 1-t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Pelo Teorema de Stokes,

$$\int\int_S rot\,\overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{S} = \int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^1 t-(1-t)\ dt + \int_0^1 -(1-t)\ dt + \int_0^1 t\ dt = 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

1,5 pts. 1,0 pts.