UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
3a. Prova – MA-211 – Sexta-feira (MANHÃ), 16/12/2016

ALUNO	RA	Turma

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
$\sum$	

3a. Prova – MA-211 – Sexta-feira (MANHÃ), 16/12/2016

INSTRUÇÕES

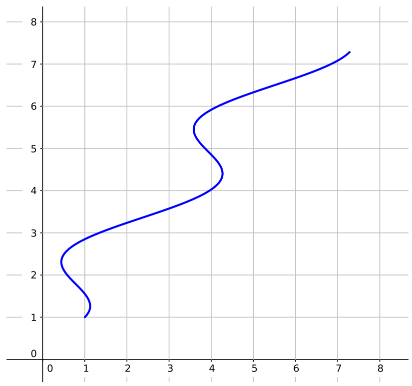
NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA
É PROIBIDO O USO DE CALCULADORAS
SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Boa Prova!

Questão 1. Determine o trabalho $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ realizado pelo campo de força

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(e^x \ln(y) - \frac{e^y}{x} + 1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{e^x}{y} - e^y \ln(x) - 1\right)\mathbf{j}.$$

ao se mover uma partícula ao longo da curva C, dada por $\mathbf{r}(t) = (t+\cos(2t))\mathbf{i}+(1+t)\mathbf{j}$, para $0 \leq t \leq 2\pi$, mostrada abaixo.

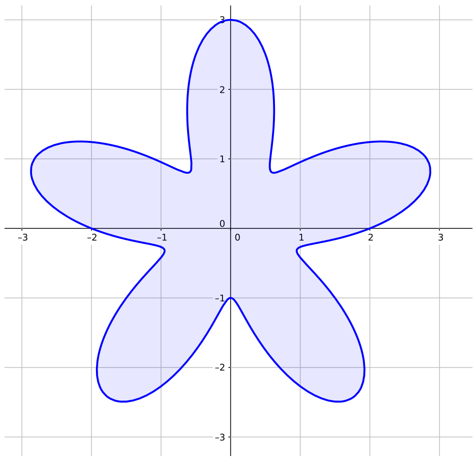


Questão 2. Use o teorema de Green para calcular a integral de linha

$$\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy,$$

em que C é a curva mostrada abaixo, orientada no sentido anti-horário e dada por

$$\mathbf{r}(t) = \big(2+\operatorname{sen}(5t)\big)(\cos(t)\mathbf{i}+\operatorname{sen}(t)\mathbf{j}), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$



Questão 3. Encontre a área da superfície $y = 4x + z^2$ que está entre os planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ e $z = 1$.

Questão 4. Use o teorema de Stokes para calcular a integral de linha

$$\oint_C zdx - 2xdy + 3ydz,$$

em que C é a curva obtida pela intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 1$, orientada no sentido anti-horário quando vista por cima.

Questão 5. Sejam $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y + z^2)\mathbf{k}$ e S a fronteira do cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e $0 \leq z \leq 3$. Calcule $\displaystyle\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$, em que $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário que aponta para fora do cilindro.

ALUNO	RA	Turma

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
$\sum$	

3a. Prova – MA-211 – Sexta-feira (MANHÃ), 16/12/2016

INSTRUÇÕES

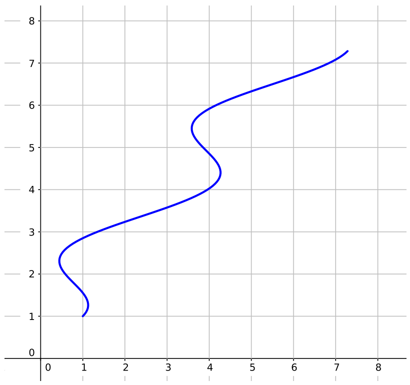
NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA
É PROIBIDO O USO DE CALCULADORAS
SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Boa Prova!

Questão 1. Determine o trabalho $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ realizado pelo campo de força

$$\mathbf{F}(x,y) = \left(e^x \ln(y) - \frac{e^y}{x} + 1\right)\mathbf{i} + \left(\frac{e^x}{y} - e^y \ln(x) - 1\right)\mathbf{j}.$$

ao se mover uma partícula ao longo da curva C, dada por $\mathbf{r}(t) = (t+\cos(2t))\mathbf{i} + (1+t)\mathbf{j}$, para $0 \le t \le 2\pi$, mostrada abaixo.



Resolução:

Primeiramente, vamos verificar se o campo de força $\mathbf{F} = \mathbf{P}\mathbf{i} + \mathbf{Q}\mathbf{j}$ é conservativo. Sabemos que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{e^x}{y} - \frac{e^y}{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{e^x}{y} - \frac{e^y}{x}. \tag{1}$$

Como $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, e ambas derivadas parciais de primeira ordem são contínuas em $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, uma região simplesmente conexa, concluímos que $\mathbf{F}$ é um campo de força conservativo. Consequentemente, existe f tal que $\nabla f = \mathbf{F}$. Com efeito, devemos ter

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \quad \Longrightarrow \quad f(x,y) = e^x \ln y - e^y \ln x + x + g(y), \tag{2}$$

em que g é uma função somente de y. Além disso, devemos ter também

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Q \quad \Longrightarrow \quad \frac{e^x}{y} - e^y \ln x + g'(y) = \frac{e^x}{y} - e^y \ln x - 1 \quad \Longrightarrow \quad g'(y) = -1 \quad \Longrightarrow \quad g(y) = y + c, \tag{3}$$

em que c é uma constante. Portanto, temos

$$f(x,y) = e^x \ln y - e^y \ln x + x - y + c. \tag{4}$$

Pelo teorema fundamental das integrais de linha, temos

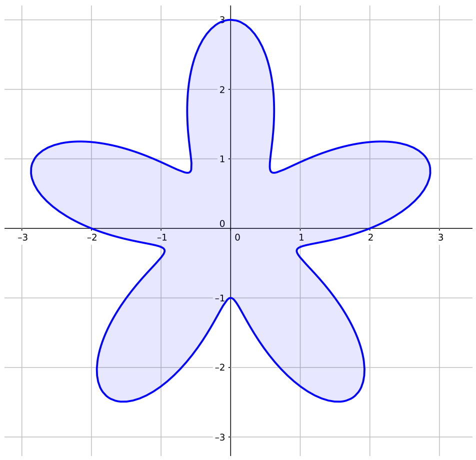
$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(2\pi)) - f(\mathbf{r}(0)) = f(2\pi + 1, 1 + 2\pi) - f(1,1) = 0. \tag{5}$$

Questão 2. Use o teorema de Green para calcular a integral de linha

$$\oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy,$$

em que C é a curva mostrada abaixo, orientada no sentido anti-horário e dada por

$$\mathbf{r}(t) = \big(2+\operatorname{sen}(5t)\big)(\cos(t)\mathbf{i} + \operatorname{sen}(t)\mathbf{j}), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$



Resolução:

Primeiramente, observe que a função não está definida na origem. Portanto, não podemos aplicar diretamente o teorema de Green considerando uma curva dada, que contém a origem. Dessa forma, deve-se considerar uma região que não contém a origem.

Seja C_a um círculo com centro na origem, raio a, inteiramente contido na região delimitada pela curva C. Pelo teorema de Green, temos

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} - \oint_{C_a} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = 0, \tag{6}$$

em que D é a região entre as curvas C_a e C e, nessa região, as derivadas parciais de P e Q são contínuas. Dessa forma,

$$I = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_a} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)dt, \tag{7}$$

em que $\mathbf{r}(t) = a\cos t\mathbf{i} + a\operatorname{sen} t\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$ descreve a curva C_a. Pela definição de integral de linha, temos

$$I = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \tag{8}$$

Questão 3. Encontre a área da superfície $y = 4x + z^2$ que está entre os planos $x = 0$, $x = 1$, $z = 0$ e $z = 1$.

Resolução:

Escolhendo x e z como parâmetros, podemos descrever a superfície por

$$\mathbf{r}(x,z) = x\mathbf{i} + (4x + z^2)\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (x,z) \in D, \tag{9}$$

em que $D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$. Para essa parametrização, temos

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_z = 2z\mathbf{j} + \mathbf{k}. \tag{10}$$

Além disso,

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2z\mathbf{k} \quad \text{e} \quad \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z\| = \sqrt{17 + 4z^2}. \tag{11}$$

Como a área de uma superfície parametrizada é

$$A(S) = \iint_D \|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z\| dA, \tag{12}$$

temos, nessa questão,

$$A(S) = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{17 + 4z^2} dx dz = \int_0^1 \sqrt{17 + 4z^2} x \Big|_0^1 dz = \int_0^1 \sqrt{17 + 4z^2} dz = 2\int_0^1 \sqrt{\frac{17}{4} + z^2} dz. \tag{13}$$

Como $\int \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2}\ln(u + \sqrt{a^2 + u^2}) + c$, encontramos

$$A(S) = 2\left(\frac{z}{2}\sqrt{\frac{17}{4} + z^2} + \frac{17}{8}\ln(z + \sqrt{\frac{17}{4} + z^2})\right)\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{21}}{2} + \frac{17}{4}\Big(\ln(2 + \sqrt{21}) - \ln(\sqrt{17})\Big). \tag{14}$$

Questão 4. Use o teorema de Stokes para calcular a integral de linha

$$\oint_C zdx - 2xdy + 3ydz,$$

em que C é a curva obtida pela intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 1$, orientada no sentido anti-horário quando vista por cima.

Resolução:

Pelo teorema de Stokes, temos

$$I = \int_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \text{rot } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}, \tag{15}$$

em que $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$, C é a curva fronteira da superfície S que, nesta questão, pode ser a parte do plano $x + y + z = 1$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

Agora,

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & -2x & 3y \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \tag{16}$$

e a superfície S pode ser descrita pela equação paramétrica

$$\mathbf{r}(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (1 - x - y)\mathbf{k}, \quad (x, y) \in D, \tag{17}$$

em que $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. As derivadas com respeito a x e a y de $\mathbf{r}$ são, respectivamente,

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} - \mathbf{k} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} - \mathbf{k}. \tag{18}$$

Logo,

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}. \tag{19}$$

Note que a orientação de S induz a orientação positiva da curva C, ou seja, a superfície fica a esquerda quando você anda na curva C com a cabeça apontada na direção e sentido de $\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y$. Concluindo, pela definição de integral de superfície, temos

$$I = \iint_D \text{rot } \mathbf{F}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot (\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y) dA = \iint_D 3 + 1 - 2dA = 2 \iint_D dA = 2\pi. \tag{20}$$

Questão 5. Sejam $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y + z^2)\mathbf{k}$ e S a fronteira do cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e $0 \leq z \leq 3$. Calcule $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$, em que $\mathbf{n}$ é o vetor normal unitário que aponta para fora do cilindro.

Resolução:

Pelo teorema do divergente, temos que

$$I = \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \text{div } \mathbf{F} dV, \tag{21}$$

em que E é o cilindro $x^2 + y^2 \leq 4$ e $0 \leq z \leq 3$. Nessa questão, temos

$$\text{div } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k} \right) \cdot (x + y + z^2)\mathbf{k} = 2z. \tag{22}$$

Logo,

$$I = \iiint_E (2z) dV. \tag{23}$$

Usando coordenadas cilíndricas,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r \operatorname{sen}\theta, \\ z = z, \end{cases} \tag{24}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 2zrdzdrd\theta & (25)\\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 z^2\Big|_0^3 rdrd\theta & (26)\\
&= \int_0^{2\pi} \frac{9}{2}r^2\Big|_0^2 d\theta & (27)\\
&= \int_0^{2\pi} 18d\theta = 36\pi. & (28)
\end{aligned}$$