

3ª PROVA MA211 — 23/10/08

ATENÇÃO: Será corrigida a redação da resposta. Cada resposta deve ser redigida com todos os detalhes. Caso duas ou mais provas apresentem alguma resposta cujas redações coincidam em mais de 50%, essa questão será **zerada** em todas elas. Não é permitido **destacar** as folhas da prova.

NOME: _____ **TURMA:** _____ **RA:** _____.

(1) (2,5 pontos) Calcule a seguinte integral dupla

$$\int \int_B \sqrt{2x - x^2 - y^2} dx dy$$

sobre a região $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - x \leq 0\}$.

(2) (2,5 pontos) Calcule a seguinte integral tripla

$$\int \int \int_B \frac{\operatorname{sen}^2(x + y - z)}{x + 2y + z} dx dy dz$$

sobre a região $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x + 2y + z \leq 2, 0 \leq x + y - z \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq z \leq 1\}$.

(3) (2,5 pontos) Determine $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma$ sendo $\vec{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + 2yz, y^2)$ e γ é a curva constituída pelos segmentos de reta $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 0)$, de $(1, 0, 0)$ a $(1, 1, 0)$, de $(1, 1, 0)$ a $(1, 1, 1)$ e de $(1, 1, 1)$ a $(1, 0, 1)$.

(4) (2,5 pontos) Utilize o Teorema de Green para transformar a integral dupla

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} 2dy dx$$

em uma integral de linha. Calcule a integral de linha.

Incluir na prova, por favor, **todas** as "contas" feitas nas resoluções. Respostas não acompanhadas de argumentos que as justifiquem não serão consideradas. Boa Prova!

3ª PROVA MA211 — 23/10/08

GABARITO PROVA 3 - QUINTA.

(1) Resolucao: $2x - x^2 - y^2 = 1 - (x - 1)^2 - y^2$. A mudanca de variavel é $x - 1 = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ (coordenadas polares com polo no ponto $(1,0)$). De forma que substituindo esses valores em $x^2 + y^2 - x = 0$ tem-se que $r = -\cos \theta$, $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$. Desta forma, por mudanca de variavel temos que

$$\int \int_B \sqrt{2x - x^2 - y^2} dx dy = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^{-\cos \theta} r \sqrt{1 - r^2} ds d\theta,$$

onde $\int \sqrt{1 - r^2} dr = -\frac{1}{3}(1 - r^2)^{3/2}$. Entao

$$\int \int_B \sqrt{2x - x^2 - y^2} dx dy = -\frac{1}{3} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} [|\sin \theta|^3 - 1] d\theta = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\sin \theta|^3 d\theta.$$

Notando que $\sin^3 \theta = \sin \theta (1 - \cos^2 \theta)$ entao $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = 4/3$ e $\int_{\pi}^{3\pi/2} \sin^3 \theta = -4/3$. Assim

$$\int \int_B \sqrt{2x - x^2 - y^2} dx dy = \pi/3 - 8/9.$$

(2) Resolucao: Facamos a mudanca de variavel $u = x + y - z, v = x + 2y + z$ e $w = z$. Entao $x = 2u - v + 3w, y = -u + v - 2w$ e $z = w$. Alem disso o determinante jacobiano é dado por $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = 1$. A regio B é mapeada pela transformacao acima na regio

$$B_{uvw} = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq u \leq \pi/4, 1 \leq v \leq 2, 0 \leq w \leq 1.\}$$

Por mudanca de variavel, tem-se que

$$\begin{aligned} \int \int \int_B \frac{\sin^2(x + y - z)}{x + 2y + z} dx dy dz &= \int \int \int_{B_{uvw}} \frac{\sin u}{v} du dv dw \\ &= \int_1^2 \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 u}{v} du dv = \int_1^2 1/v dv \int_0^{\pi/4} \sin^2 u du = \ln 2 (\pi/8 - 1/4). \end{aligned}$$

(3) Resolucao: $f_x = 2xy \Rightarrow f(x, y, z) = x^2 y + K_1(y, z); f_y = x^2 + 2yz \Rightarrow \frac{\partial K_1}{\partial y}(y, z) + x^2 = x^2 + 2yz \Rightarrow K_1(y, z) = y^2 z + K_2(z)$. Assim,

$$f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + K_2(z).$$

Por outro lado, $f_z = y^2 \Rightarrow y^2 = y^2 + K_2'(z) \Rightarrow K_2(z) = C$ onde C é constante. Logo, $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z + C$. Desta forma, o campo é conservativo e pelo teorema fundamental

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\gamma = f(1, 0, 1) - f(0, 0, 0) = 0.$$

(4) Resolucao: $x^2 - 1 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}, -1 \leq x \leq 1$. Seja $C = C_1 \cup C_2$ onde $C_1 : x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi; C_2 : x = x, y = x^2 - 1, -1 \leq x \leq 1$. Pelo Teorema de Green,

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2-1}^{\sqrt{1-x^2}} 2x dy = 2 \int_C x dy = 2 \left(\int_{C_1} x dy + \int_{C_2} x dy \right) = 2 \left(\int_0^{\pi} \cos^2 t dt + \int_{-1}^1 2x^2 dx \right) = \pi + 8/3.$$