2ª Prova de MA-211/A/B (08/10/2010)

Prof. Sergio Antonio Tozoni

RA: _______ Nome: GABARITO

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
Total	

1. Suponha que $T(x,y) = 40 - x^2 - 2y^2$ represente uma distribuição de temperatura no plano. Admita que x e y sejam dados em *km* e a temperatura em ^oC. Suponha que um indivíduo encontra-se na posição (3,2).

(a) (1,0 ponto) Qual é a direção e sentido que deverá tomar se seu desejo for caminhar na direção de maior crescimento da temperatura? Qual é a taxa de variação da temperatura nesta direção?

(b) (1,5 pontos) Determine a trajetória a ser descrita por esse indivíduo admitindo que ele busque sempre caminhar na direção de maior crescimento da temperatura.

2. **(a)** (0,5 ponto) Determine o polinômio de Taylor $P_1(x,y)$, de ordem 1, da função $f(x,y) = y\cos(1+x^2)$ em torno de (0, 0).

(b) (2,0 pontos) Mostre, usando o Teorema de Taylor, que para todo (x,y) com $|x| \le 1$ e $|y| \le 1$ temos que

$$\left|y\cos(1+x^2) - P_1(x,y)\right| \le 3|x|^2 + 2|x||y|.$$

(c) (0,5 ponto) Avalie o erro que se comete na aproximação $y\cos(1+x^2) \cong P_1(x,y)$ para $x = y = 10^{-2}$.

3. (2,0 pontos) Seja $f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$.

(a) Determine os pontos críticos de $f(x,y)$.

(b) Classifique os pontos críticos de $f(x,y)$: máximo local, mínimo local ou ponto de sela.

4. (2,5 pontos) Usando **Multiplicadores de Lagrange**, determine as dimensões da caixa retangular de maior volume no primeiro octante ($x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$), com três faces nos planos coordenados e com um vértice no plano $2x + y + 3z = 6$.

1 (a): $\nabla T(x,y) = (-2x, -4y)$ · $T(3,2) = 23$

$\nabla T(3,2) = (-6,-8)$ é a direção de maior crescimento da temperatura.

0,5

$\|\nabla T(3,2)\| = \|(-6,-8)\| = 10$

$10\ °C/km$ é a taxa de variação da temperatura na direção do gradiente $\nabla f(3,2)$.

0,5

1 (b): $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ – trajetória a ser descrita pelo indivíduo

$$\gamma'(t) = \nabla T(\gamma(t)) \iff (x'(t), y'(t)) = (-2x(t), -4y(t))$$

$$\iff \begin{cases} x'(t) = -2x(t) \\ y'(t) = -4y(t) \end{cases}$$

0,5

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -2 \iff (\ln x(t))' = -2 \implies \ln x(t) = \int -2\,dt = -2t + C_1$$

$$\implies x(t) = K_1 e^{-2t}$$

$$\frac{y'(t)}{y(t)} = -4 \iff (\ln y(t))' = -4 \implies \ln y(t) = \int -4\,dt = -4t + C_2$$

$$\implies y(t) = K_2 e^{-4t}$$

0,6

$$\gamma(t) = (K_1 e^{-2t}, K_2 e^{-4t})$$

$$(3,2) = \gamma(0) = (K_1, K_2)$$

Resposta: $\gamma(t) = (3e^{-2t}, 2e^{-4t})$

0,4

1(b) (outra forma) $\gamma(t) = (t, y(t))$ $\nabla T = (-2x, -4y)$

$$\gamma'(t) = \lambda \nabla T(\gamma(t)) \iff (1, y'(t)) = \lambda(-2t, -4y(t))$$

$$\iff \begin{cases} 1 = -2t\lambda & \Rightarrow \lambda = -\dfrac{1}{2t} \\ y'(t) = -4y(t)\lambda \end{cases}$$

$$y'(t) = +4y(t)\frac{1}{2t} \iff \frac{y'(t)}{y(t)} = \frac{2}{t}$$

$$(\ln y(t))' = \frac{2}{t} \Rightarrow \ln y(t) = 2\int \frac{dt}{t} = 2\ln t + C_1$$

$$\Rightarrow y(t) = e^{2\ln t + C_1} = K_1 t^2$$

$$\gamma(t) = (t, K_1 t^2)$$

$$(3,2) = \gamma(t, K_1 t^2) \Rightarrow t = 3 \text{ e } K_1 3^2 = 2$$

$$\Rightarrow K_1 = \frac{2}{9}$$

$$\boxed{\gamma(t) = \left(t, \frac{2}{9}t^2\right)}, \quad \gamma(3) = (3,2)$$

2(a): $\frac{\partial f}{\partial x} = -2xy \operatorname{sen}(1+x^2)$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(1+x^2)$

$$P_1(x,y) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, y$$

$$= 0 + 0 \cdot x + (\cos 1)\, y = y \cos 1$$

0,5

2(b): $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2y \operatorname{sen}(1+x^2) - 4x^2 y \cos(1+x^2)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2x \operatorname{sen}(1+x^2)$

0,5

$$E(x,y) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x},\bar{y})\, x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x},\bar{y})\, xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x},\bar{y})\, y^2\right]$$

$(\bar{x},\bar{y})$ é um ponto do segmento de reta com extremidades $(0,0)$ e (x,y) e assim devemos ter $|\bar{x}| \leq 1$ e $|\bar{y}| \leq 1$. Então

0,5

$$|E(x,y)| \leq \frac{1}{2}\Big[\big(2|\bar{y}|\,|\operatorname{sen}(1+\bar{x}^2)| + 4|\bar{x}|^2|\bar{y}|\,|\cos(1+\bar{x}^2)|\big)\, x^2$$

$$+ 4|\bar{x}|\,|\operatorname{sen}(1+\bar{x}^2)|\,|x|\,|y|\Big]$$

$$\leq \frac{1}{2}\left[(2+4)\, x^2 + 4|x|\,|y|\right] = 3|x|^2 + 2|x|\,|y|$$

Segue pela Fórmula de Taylor que

$$|y \cos(1+x^2) - P_1(x,y)| = |E(x,y)| \leq 3|x|^2 + 2|x|\,|y|$$

1,0

2(c): $|E(10^{-2}, 10^{-2})| \leq 3 \cdot (10^{-2})^2 + 2 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2} = 5\, 10^{-4}$

0,5

Gabarito - Questão 3

1,0

a) $f(x,y) = x^3+y^3-6xy$. Os pontos críticos de f são os pontos (x_0,y_0) tais que $\nabla f(x_0,y_0) = (0,0)$. definição (0,1)

Temos que $\nabla f(x,y) = (3x^2-6y, 3y^2-6x)$, de modo que (0,1)

devemos resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} 3x^2-6y=0 \\ 3y^2-6x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=2y \\ y^2=2x \end{cases}$$

Em particular, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Assim, $x^4 = 4y^2 = 4(2x) = 8x \Rightarrow x(x^3-8)=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{Se } x=0,\ y=0 \\ \text{ou} & \\ x=2 & \text{Se } x=2,\ y=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Os pontos críticos de f são $(0,0)$ e $(2,2)$.
(0,4) (0,4)

desde que o raciocínio esteja correto.

obs: Caso sejam encontrados pontos críticos a mais, máximo de 0,6 no item (a). Quanto mais erros, menor a pontuação

1,0

5) Para classificarmos os pontos críticos de f, devemos calcular o determinante hessiano

$$H(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{vmatrix}$$ Definiç: 0,2

Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -6 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

temos $H(x,y) = 36xy - 36 = 36(xy-1)$. 0,2

Para $(0,0)$, $H(0,0) = -36 < 0 \Rightarrow (0,0)$ é ponto de sela

0,3

Para $(2,2)$, $H(2,2) = 36.3 > 0$. Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,2) = 12 > 0$

segue que $(2,2)$ é ponto de mínimo local

0,3

de f.

/ /

Gabarito da 4ª Questão

O problema consiste em maximizar $V(x,y,z) = xyz$ restrito a $2x+y+3z=6$

Seja $g(x,y,z) = 2x+y+3z-6$. Pelo método dos Multiplicadores de Lagrange, o ponto ótimo (x,y,z) é solução do sistema +0,5

$$\begin{cases} \nabla V(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} yz = \lambda \cdot 2 \\ xz = \lambda \cdot 1 \\ xy = \lambda \cdot 3 \\ 2x+y+3z = 6 \end{cases}$$ + 1,0

Obs. ~~As palavras grifadas~~ Descontei um décimo (0.1) de quem não mencionar as palavras-chaves grifadas em vermelho

Como $x, y, z > 0$ e $\lambda \neq 0$, podemos multiplicar a 1ª eq. por x, a 2ª eq. por y e a 3ª por z após o que comparando e dividindo por λ nos dá

$$2x = y = 3z$$

Substituindo em $2x+y+3z=6$ fornece

$$\boxed{x=1,\ y=2,\ z=\frac{2}{3}}$$ + 1,0

BR
PETROBRAS