UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
2a. Prova – MA-211 – Sexta-feira (MANHÃ), 11/11/2016

ALUNO	RA	Turma

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
$\sum$	

2a. Prova – MA-211 – Sexta-feira (MANHÃ), 11/11/2016

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA
É PROIBIDO O USO DE CALCULADORAS
SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

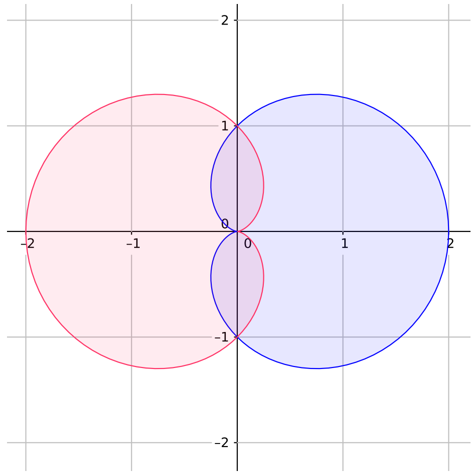
Boa Prova!

Questão 1.

(a) Calcule a integral dupla iterada $\int_1^e \int_0^{\ln(x)} x^3 dydx$ invertendo a ordem de integração.

(b) Use a transformação $x = 2u + v$ e $y = u + 2v$ para calcular a integral $I = \int_R (x - 3y)dA$, em que R é a região triangular de vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$ e $(1, 2)$.

Questão 2. Encontre a área da região comum aos interiores das cardióides $r = 1+\cos\theta$ e $r = 1-\cos\theta$, para $-\pi \le \theta \le \pi$, mostradas abaixo:



Dica: Utilize a simetria do problema.

Questão 3. Determine o volume do sólido no primeiro octante, delimitado pelos planos coordenados, pelo plano $y = 1 - x$ e pela superfície $z = \cos(\pi x/2)$, para $0 \leq x \leq 1$.

Questão 4. Calcule $\iiint_E x^2 dV$, em que E é o sólido que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, acima do plano $z = 0$ e abaixo do cone $z^2 = 4x^2 + 4y^2$.

Questão 5. Usando coordenadas esféricas, encontre o volume do sólido da região limitada por baixo pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e por cima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

UNICAMP IMECC

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
2a. Prova – MA-211 – Sexta-feira (MANHÃ), 11/11/2016

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
$\sum$	

ALUNO	RA	Turma

2a. Prova – MA-211 – Sexta-feira (MANHÃ), 11/11/2016

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA
É PROIBIDO O USO DE CALCULADORAS
SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

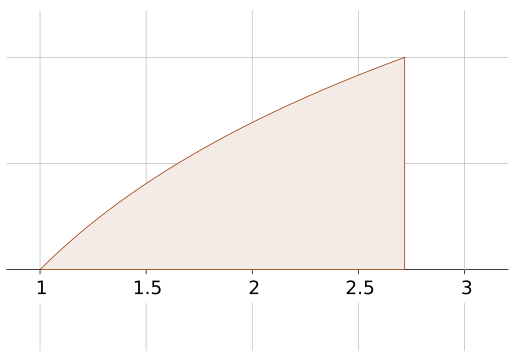
Questão 1.

(a) Calcule a integral dupla iterada $\int_1^e \int_0^{\ln(x)} x^3 dydx$ invertendo a ordem de integração.

(b) Use a transformação $x = 2u + v$ e $y = u + 2v$ para calcular a integral $I = \int_R (x - 3y)dA$, em que R é a região triangular de vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$ e $(1, 2)$.

Resolução:

(a) A figura abaixo mostra a região de integração:



Escrevendo a integral dupla como uma integral iterada em que integra-se primeiro em x, temos

$$I = \iint_D x^3 dA = \underbrace{\int_0^1}_{\checkmark \mathbf{0,2}} \underbrace{\int_{e^y}^e}_{\checkmark \mathbf{0,2}} x^3 dxdy = \frac{1}{4}\int_0^1 (e^4 - e^{4y})dy \checkmark \mathbf{0,2} = \frac{3e^4 + 1}{16}. \checkmark \mathbf{0,2} \tag{1}$$

(b) Primeiramente, o jacobiano da transformação é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3. \checkmark \mathbf{0,2} \tag{2}$$

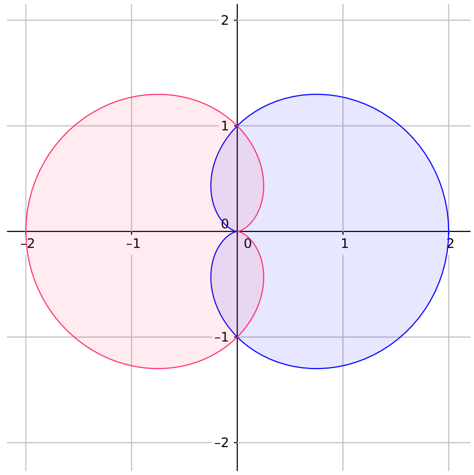
Isolando u e v, encontramos

$$u = \frac{1}{3}(2x - y) \quad \text{e} \quad v = \frac{1}{3}(2y - x). \checkmark \mathbf{0,2} \tag{3}$$

A região de integração no plano uv é a região triangular com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$. $\checkmark$ **0,2** Além disso, a integral torna-se

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-u} (-u - 5v)3dvdu \checkmark \mathbf{0,2} = -3\int_0^1 \left(u(1 - u) + \frac{5}{2}(1 - u)^2\right)du \checkmark \mathbf{0,2} = -3. \checkmark \mathbf{0,2} \tag{4}$$

Questão 2. Encontre a área da região comum aos interiores das cardióides $r = 1+\cos\theta$ e $r = 1-\cos\theta$, para $-\pi \leq \theta \leq \pi$, mostradas abaixo:



Dica: Utilize a simetria do problema.

Resolução:

Devido a simetria da região comum entre as duas cardióides, temos

$$A = 4\iint_D dA, \tag{5}$$

em que D é a parte da região no primeiro quadrante, referente a cardioide $r = 1-\cos\theta$. Usando coordenadas polares, obtemos a seguinte integral iterada:

$$A = 4\underbrace{\int_0^{\pi/2}}_{\checkmark 0{,}3}\underbrace{\int_0^{1-\cos\theta}}_{\checkmark 0{,}3}\underbrace{r dr d\theta}_{\checkmark 0{,}3} \tag{6}$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}(1-\cos\theta)^2 d\theta \checkmark \mathbf{0,3} \tag{7}$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\left(1-2\cos\theta+\cos^2\theta\right) d\theta \checkmark \mathbf{0,2}. \tag{8}$$

Lembrando que $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ ✓**0,3** , concluímos que

$$A = 2\int_0^{\pi/2}\left(\frac{3}{2}-2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right) d\theta = \frac{3\pi}{2}-4. \checkmark \mathbf{0,3} \tag{9}$$

Questão 3. Determine o volume do sólido no primeiro octante, delimitado pelos planos coordenados, pelo plano $y = 1 - x$ e pela superfície $z = \cos(\pi x/2)$, para $0 \leq x \leq 1$.

Resolução:

Integrando primeiro sobre z, depois sobre y e por último sobre x, obtemos a seguinte integral iterada:

$$V = \iiint_E dV = \underbrace{\int_0^1}_{\checkmark 0,3} \underbrace{\int_0^{1-x}}_{\checkmark 0,3} \underbrace{\int_0^{\cos(\pi x/2)}}_{\checkmark 0,3} dz dy dx \tag{10}$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dy dx \checkmark \mathbf{0,3} \tag{11}$$

$$= \int_0^1 (1-x) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx. \checkmark \mathbf{0,3} \tag{12}$$

Integrando por partes, encontramos

$$V = \frac{2}{\pi}(1-x) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\Big|_0^1 + \frac{2}{\pi} \int_0^1 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) dx \checkmark \mathbf{0,3} = \frac{4}{\pi^2} \checkmark \mathbf{0,2}. \tag{13}$$

Questão 4. Calcule $\iiint_E x^2 dV$, em que E é o sólido que está dentro do cilindro $x^2+y^2=1$, acima do plano $z=0$ e abaixo do cone $z^2=4x^2+4y^2$.

Resolução:

Usando coordenadas cilíndricas, o cilindro e o cone são descritos respectivamente por

$$r^2 = 1 \checkmark \mathbf{0,2} \quad \text{e} \quad z = 2r. \checkmark \mathbf{0,2} \tag{14}$$

Dessa forma, temos a integral

$$I = \iiint_E x^2 dV = \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{\checkmark \mathbf{0,2}} \underbrace{\int_0^1}_{\checkmark \mathbf{0,2}} \underbrace{\int_0^{2r}}_{\checkmark \mathbf{0,2}} \underbrace{r^2\cos^2\theta}_{\checkmark \mathbf{0,2}} \underbrace{r dz dr d\theta}_{\checkmark \mathbf{0,2}} \tag{15}$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4\cos^2\theta dr d\theta \checkmark \mathbf{0,2} \tag{16}$$

$$= \frac{2}{5}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \checkmark \mathbf{0,2} \tag{17}$$

$$= \frac{2}{5}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(1+\cos 2\theta\right) d\theta = \frac{2\pi}{5}. \checkmark \mathbf{0,2} \tag{18}$$

Questão 5. Usando coordenadas esféricas, encontre o volume do sólido da região limitada por baixo pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e por cima pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

Resolução:

Usando coordenadas esféricas, o cone e a esfera são descritas respectivamente pelas equações:

$$\phi = \frac{\pi}{4}\checkmark\mathbf{0,2} \quad \text{e} \quad \rho = \cos\phi.\checkmark\mathbf{0,2} \tag{19}$$

Dessa forma, o volume é dado pela seguinte integral iterada:

$$V = \iiint_E dV = \underbrace{\int_0^{2\pi}}_{\checkmark\mathbf{0,2}}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}}}_{\checkmark\mathbf{0,2}}\underbrace{\int_0^{\cos\phi}}_{\checkmark\mathbf{0,2}}\underbrace{\rho^2 \operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta}_{\checkmark\mathbf{0,2}} \tag{20}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{\cos\phi} \operatorname{sen}\phi d\phi d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\phi \operatorname{sen}\phi d\phi d\theta\checkmark\mathbf{0,2}. \tag{21}$$

Tomando $u = \cos\phi$, encontramos

$$V = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} u^3 du d\theta\checkmark\mathbf{0,2} = -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \frac{u^4}{4}\Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} d\theta = \frac{1}{16}\int_0^{2\pi} d\theta\checkmark\mathbf{0,2} = \frac{\pi}{8}\checkmark\mathbf{0,2}. \tag{22}$$