IMECC-UNICAMP MA-211

Nome: ______________________ RA: __________

Turma: __________ 2^a **PROVA** 25/09/2008

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
Total	

2,5 pts. Questão 1: Determine os pontos de máximo e de mínimo locais e os pontos de sela (se existirem) da função $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2 y + 4$. Utilize o teste da segunda derivada para justificar.

2,5 pts. Questão 2: Utilize multiplicadores de Lagrange para determinar os valores máximo e mínimo da função $f(x, y, z) = 8x - 4z$, restrita a condição $x^2 + 10y^2 + z^2 = 5$.

2,5 pts. Questão 3: Determine o volume abaixo do plano $z - y = 0$ e acima da região, no primeiro quadrante, limitada pelas parábolas $x = y^2$ e $x = 2 - y^2$.

2,5 pts. Questão 4:

(1,25 pts.) (a) Calcule $\int\int_B sen\ x^3\ dxdy$; $B = \{(x, y) |\ 0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq 1\}$.

(1,25 pts.) (b) Calcule $\int\int_B\ x - y\ dxdy$; sendo B o semi-circulo $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$.

Respostas não justificadas não serão consideradas. Boa prova!

2,5 pts. Questão 1:

$$f_x = 2x + 2xy = 0 \Rightarrow x(1+y) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = -1.$$
$$f_y = 2y + x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2y. \tag{1}$$
$$x = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} y = 0 \Rightarrow (0,0) \text{ é um ponto crítico.}$$
$$y = -1 \overset{(1)}{\Rightarrow} x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow (\pm\sqrt{2}, -1) \text{ são pontos críticos.} \Big| 1,5 \text{ pts.}$$
$$D(x,y) = f_{xx}f_{yy} - f_{xx}^2 = (2+2y)2 - (2x)^2. \Big| 0,5 \text{ pts.}$$
$$D(0,0) = 4 > 0 \text{ e } f_{xx}(0,0) = 2 > 0 \Rightarrow (0,0) \text{ é ponto de mínimo local.}$$
$$D(\pm\sqrt{2}, -1) = -8 < 0 \Rightarrow (\pm\sqrt{2}, -1) \text{ são pontos de sela.} \Big| 0,5 \text{ pts.}$$

2,5 pts. Questão 2:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z) \\ g(x,y,z) = x^2 + 10y^2 + z^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 = 2\lambda x & (i) \\ 0 = 20\lambda y & (ii) \\ -4 = 2\lambda z & (iii) \end{cases}$$

$$0 \overset{(ii)}{=} 20\lambda y \Rightarrow y = 0 \overset{(i),(iii)}{\Rightarrow} x = \frac{4}{\lambda} \text{ e } z = -\frac{2}{\lambda} \overset{g(x,y,z)}{\Rightarrow} \frac{16}{\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 5 \Rightarrow \lambda = \pm 2$$

$\Rightarrow (2,0,1)$ e $(-2,0,1)$ são os candidatos a máximo ou mínimo. | $1,5$ pts.

Comparando f(2,0,-1) com f(-2,0,1), temos que f(2,0,-1)=20 é o máximo e f(-2,0,1)=-20 é o mínimo. | $1,0$ pts.

2,5 pts. Questão 3:

Intersecções das parábolas $x = y^2$ e $x = 2 - y^2$: $\quad y^2 = 2 - y^2 \Rightarrow y = \pm 1$.
Disto e do fato que a região está no primeiro quadrante, ela será dada por
$D = \{(x,y) |\ 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq 2 - y^2\}$.

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{2-y^2} y \, dxdy \Big|_{1,5 \text{ pts.}} = 2\int_0^1 y - y^3 \, dxdy = 2\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2}. \Big|_{1,0 \text{ pts.}}$$

2,5 pts. Questão 4:

$$(a) \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 sen\ x^3 \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{x^2} sen\ x^3 \, dydx \Big|_{0,5 \text{ pts.}} = \int_0^1 x^2 sen\ x^3 \, dx = -\frac{cos\ x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(1 - cos\ 1). \Big|_{0,75 \text{ pts.}}$$

$$(b) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 cos\ \theta - r^2 sen\ \theta \, drd\theta \Big|_{0,5 \text{ pts.}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r^2 cos\ \theta \, drd\theta = \left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^1\right)\left(sen\ \theta\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2}{3}. \Big|_{0,75 \text{ pts.}}$$