1ª Prova de MA-211/A/B (03/09/2010)

RA:__________**Turma:**____ **Nome:** GABARITO

1. (2,5 pontos) Calcule os seguintes limites, caso existam. Caso não existam, justifique.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-2xy}{x^2+y^2}$, **(b)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x-y^4}$.

2. (3,0 pontos) Considere a função

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2} & se\ \ (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & se\ \ (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(a) Verifique se f é diferenciável em $(x,y)\neq(0,0)$. Justifique.

(b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Verifique se f é diferenciável em (0,0). Justifique.

3. Seja $f(x,y)=\displaystyle\int_{2x-y}^{3y} e^{t^2}\,dt$.

(a) (1,5 pontos) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

(b) (0,5 ponto) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de $z=f(x,y)$ no ponto $(0\,,0\,,\ f(0,0))$.

4. (2,5 pontos) Determine o ponto P sobre o gráfico da função $f(x,y)=1-x^2-2y^2$, onde o plano tangente é paralelo ao plano $3x-y+3z=1$. Determine a equação do plano tangente.

1a) $f(x,y) = \dfrac{x^3 - 2xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$

$\gamma(t) = (t, kt)$, $t \in \mathbb{R}$, k (constante)

$$f(\gamma(t)) = f(t, kt) = \frac{t^3 - 2t^2 k}{t^2 + k^2 t^2} = \frac{t - 2k}{1+k^2}$$

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t-2k}{1+k^2} = -\frac{2k}{1+k^2}$$

O limite acima depende de k e portanto o limite dado não existe.

1,2

1b) $g(x,y) = \dfrac{xy^2}{x-y^4}$, $(x,y) \neq (0,0)$

$$1 = g(x,y) = \frac{xy^2}{x-y^4} \iff xy^2 = x - y^4 \iff x = \frac{y^4}{1-y^2}$$

$y = t$, $x = \dfrac{t^4}{1-t^2}$, $\gamma(t) = \left(\dfrac{t^4}{1-t^2}, t\right)$, $t \neq 1$

$f(\gamma(t)) = f\left(\dfrac{t^4}{1-t^2}, t\right) = 1$, $\forall\, t \neq 0, 1$, $\gamma(0) = (0,0)$

$$\lim_{t\to 0} f(\gamma(t)) = 1$$

0,9

$\alpha(t) = (0, t)$, $f(\alpha(t)) = 0$, $\forall\, t \neq 0$

$$\lim_{t \to 0} f(\alpha(t)) = 0$$

$\lim\limits_{t\to 0} f(\gamma(t)) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{t \to 0} f(\alpha(t))$, então o limite dado não existe.

0,4

2a) $h(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2} = (x^2+y^2)^{-1}$, $(x,y) \neq (0,0)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial x} = -\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2} & \text{função racional e portanto contínua.} \\ \dfrac{\partial h}{\partial y} = -\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2} & \text{" \quad " \quad e \quad " \quad ".} \end{cases}$$

Logo $h(x,y)$ é diferenciável por teorema dado em aula

$g(t) = \cos t$ é diferenciável

$f(x,y) = g \circ h(x,y)$, para $(x,y) \neq (0,0)$, é diferenciável pois é composta de duas funções diferenciáveis.

1,0

2b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \cos \frac{1}{h^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{h} \, \underbrace{\cos \frac{1}{h^2}}_{\text{limitada}} = 0$$

0,5

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{h} \, \underbrace{\cos \frac{1}{h^2}}_{\text{limitada}} = 0$$

0,5

2c) $E(h,k) = f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\, h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, k$

$$= (h^2+k^2) \cos \frac{1}{h^2+k^2}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{E(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \underbrace{\sqrt{h^2+k^2}}_{\downarrow\, 0} \underbrace{\cos \frac{1}{h^2+k^2}}_{\text{limitada}}$$

1,0

2a) (outra resolução) Para $(x,y) \neq (0,0)$ temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos \frac{1}{x^2+y^2} + (x^2+y^2)\left[-\operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}\right](-1) \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= 2x \cos \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2x}{x^2+y^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \cos \frac{1}{x^2+y^2} + \frac{2y}{x^2+y^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2+y^2}$$

0,5

Como polinômios e funções racionais são funções contínuas, $t \mapsto \cos t$ e $t \mapsto \operatorname{sen} t$ são funções contínuas de uma variável real e composta de funções contínuas é contínua, então que $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são funções contínuas. Segue por teorema dado em aula que $f(x,y)$ é diferenciável em $(x,y) \neq (0,0)$.

0,5

3a) $f(x,y) = \int_{2x-y}^{3y} e^{t^2}\,dt$. $g(u) = \int_0^u e^{t^2}\,dt$

$$f(x,y) = g(3y) - g(2x-y)$$

$$g'(u) \overset{\text{T.F.C}}{=\!=} e^{u^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2g'(2x-y) = -2e^{(2x-y)^2} \quad \text{(regra da cadeia)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3g'(3y) + g'(2x-y) = 3e^{9y^2} + e^{(2x-y)^2}$$

1,5

3b) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 3+1 = 4$

$$f(0,0) = \int_0^0 e^{t^2}\,dt = 0$$

$$z - 0 = -2(x-0) + 4(y-0)$$

$$z = -2x + 4y \quad \text{(equação do plano tangente)}$$

0,5

---

4) Plano tangente pelo ponto $P = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$:

$$\Pi: \; z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4y$$

$$\Pi: \; z - (1 - x_0^2 - 2y_0^2) = -2x_0(x-x_0) - 4y_0(y-y_0)$$

$$\Pi: \; z + 2x_0 x + 4y_0 y = 1 + x_0^2 + 2y_0^2$$

0,1

Para que o plano tangente Π seja paralelo ao plano

$$\beta: \; 3x - y + 3z = 1 \iff x - \frac{1}{3}y + z = \frac{1}{3}$$

devemos ter:

$$2x_0 = 1 \Rightarrow \boxed{x_0 = \frac{1}{2}} \quad e \quad 4y_0 = -\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{y_0 = -\frac{1}{12}}$$

0,8

0,1 $\quad f(x_0,y_0) = 53/72$

$$P = \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{12}, \frac{53}{72}\right)$$

0,5

Equação do plano tangente:

$$\Pi: \; z + x - \frac{1}{3}y = 1 + \frac{1}{4} + \frac{2}{144} = \frac{72+18+1}{72}$$

$$\Pi: \; z + x - \frac{1}{3}y = \frac{91}{72}$$

1,0

4) (outra resolução)

$$f(x,y) = 1 - x^2 - 2y^2$$

$$\pi : 3x - y + 3z = 1 \quad , \quad \vec{n}_1 = (3,-1,3) \perp \pi$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -4y$$

$$\vec{n}_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right) = (-2x, -4y, -1)$$

$\vec{n}_2$ = vetor normal do plano tangente ao gráfico de f por $(x, y, f(x,y))$.

$$\vec{n}_2 \parallel \vec{n}_1 \iff \exists\ \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } \vec{n}_2 = \lambda \vec{n}_1$$

$$(-2x, -4y, -1) = \lambda(3,-1,3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x = 3\lambda \\ -4y = -\lambda \\ -1 = 3\lambda \Rightarrow \lambda = -1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x = -1 \\ -4y = 1/3 \end{cases}$$

$$\boxed{x = 1/2 \ , \quad y = -1/12}$$

$$f(1/2, -1/12) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{12}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{144}$$

$$= \frac{72}{72} - \frac{18}{72} - \frac{1}{72} = \frac{53}{72}$$

1,5

Equação do plano tangente

$$z - \frac{53}{72} = -1(x - 1/2) + \frac{1}{3}(y + 1/12)$$

$$z = -x + \frac{y}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{36} + \frac{53}{72} = -x + \frac{y}{3} + \frac{36}{72} + \frac{2}{72} + \frac{53}{72}$$

$$\boxed{z = -x + \frac{y}{3} + \frac{91}{72}}$$

1,0