UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
1a. Prova – MA-211 – Sexta-feira (MANHÃ), 30/09/2016

ALUNO	RA	Turma

Q1	
Q2	
Q3	
Q4	
Q5	
$\sum$	

1a. Prova – MA-211 – Sexta-feira (MANHÃ), 30/09/2016

INSTRUÇÕES

NÃO É PERMITIDO DESTACAR AS FOLHAS DA PROVA
É PROIBIDO O USO DE CALCULADORAS
SERÃO CONSIDERADAS SOMENTE AS QUESTÕES ESCRITAS DE FORMA CLARA E DEVIDAMENTE JUSTIFICADAS

Boa Prova!

Questão 1.

(a) Determine se a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - xy - y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é contínua na origem.

(b) Calcule, se existir, o limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - 2xy^2}{x^2 + y^2}.$$

Justifique sua resposta.

Questão 2.

(a) Seja $g(t) = f(3t^2, t^3, e^{2t})$ e suponha que $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = 4$. Determine $g'(0)$.

(b) Seja $f(u, v, w)$ é diferenciável. Mostre que, se $u = x - y$, $v = y - z$ e $w = z - x$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Questão 3. Mostre que todo plano que é tangente ao cone $x^2 + y^2 = z^2$ contém a origem.

Questão 4. Determine e classifique os pontos críticos da função

$$f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy.$$

Questão 5. Encontre todos os valores extremos da função

$$f(x, y) = xy,$$

sobre a elipse

$$x^2 + 4y^2 = 8,$$

e classifique-os como máximo ou mínimo.

UNICAMP

GABARITO

MA211 – PROVA 1

Sexta-feira (manhã), 30/09/2016.

*Para correção, cada símbolo "✓**x** " o item que o antecede vale* **x** *pontos.*

Resolução da Questão 1. (a) Sabemos que função será contínua na origem se

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0. \checkmark \mathbf{0,2}$$

Contudo, considerando os caminhos

$$C_1 = \{(x,y) : x = 0, y = t\} \quad \text{e} \quad C_2 = \{(x,y) : x = t, y = t\},$$

concluímos que

$$\lim_{(x,y)\to_{C_1}(0,0)} f(x,y) = 0 \checkmark \mathbf{0,2} \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to_{C_2}(0,0)} f(x,y) = -\frac{1}{2}. \checkmark \mathbf{0,2}$$

Como os limites sobre os caminhos C_1 e C_2 são diferentes, o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe. ✓**0,2**

Como o limite não existe, f não é contínua na origem. ✓**0,2**

(b) Considere a mudança de variáveis $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$, com $r \geq 0$. Dessa forma, temos

$$f(x,y) = \frac{r^3\cos^3\theta - 2r^3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta}{r^2} = r(\cos^3\theta - 2\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta). \checkmark \mathbf{0,2}$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$0 \leq |\cos^3\theta - 2\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta| \leq |\cos^3\theta| + 2|\cos\theta||\,\mathrm{sen}^2\,\theta| \leq 3. \checkmark \mathbf{0,2}$$

Logo, pelo teorema do confronto ✓**0,2** temos

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{r\to 0^+} r|\cos^3\theta - 2\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta| \leq \lim_{r\to 0^+} = 0. \checkmark \mathbf{0,2}$$

Portanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \checkmark \mathbf{0,2}.$$

Resolução da Questão 2. (a) Pela regra da cadeia, temos

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \checkmark \mathbf{0,4}.$$

em que

$$\frac{dx}{dt} = 6t, \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2 \quad \text{e} \quad \frac{dz}{dt} = 2e^{2t}. \checkmark \mathbf{0,2}$$

Logo,

$$g(t) = 2t\frac{\partial f}{\partial x}(3t^2, t^3, e^{2t}) + 3t^2\frac{\partial f}{\partial y}(3t^2, t^3, e^{2t}) + 2e^{2t}\frac{\partial f}{\partial z}(3t^2, t^3, e^{2t}). \checkmark \mathbf{0,2}$$

Para $t = 0$, temos

$$g'(0) = 2\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,1) = 8 \checkmark \mathbf{0,2}.$$

(b) Primeiramente, observe que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \checkmark \mathbf{0,1} \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -1, \checkmark \mathbf{0,1} \tag{2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 1. \checkmark \mathbf{0,1} \tag{3}$$

Pela regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w}, \checkmark \mathbf{0,2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}, \checkmark \mathbf{0,2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}. \checkmark \mathbf{0,2}$$

Portanto, valem as equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial w}\right) + \left(-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right) + \left(-\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w}\right) = 0. \checkmark \mathbf{0,1}$$

Resolução da Questão 3. Considere a função

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2. \checkmark \mathbf{0,2}$$

O plano tangente à F num ponto (a,b,c) satisfaz

$$\nabla F(a,b,c)(x-a, y-b, z-c) = 0. \checkmark \mathbf{0,4}$$

Equivalentemente, temos

$$2a(x-a) + 2b(y-b) - 2c(z-c) = 0. \checkmark \mathbf{0,2}$$

ou ainda,

$$ax + by - cz - (a^2 + b^2 - c^2) = 0. \checkmark \mathbf{0,2}$$

Como o ponto (a,b,c) pertence ao cone, temos

$$a^2 + b^2 - c^2 = 0. \checkmark \mathbf{0,4}$$

Logo, qualquer ponto (x,y,z) do plano tangente deve satisfazer

$$ax + by - cz = 0. \checkmark \mathbf{0,2}$$

Agora, essa equação é válida para $(x,y,z) = (0,0,0)$. Portanto, qualquer plano tangente ao cone contém a origem $\checkmark$ **0,4** .

Resolução da Questão 4. Como f é diferenciável, os pontos críticos de f satisfazem

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x) = (0,0).\checkmark \mathbf{0,3}$$

Equivalentemente, temos o sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0. \end{cases} \quad \checkmark \mathbf{0,2}$$

cujas soluções são $(0,0)$ e $(1,1)$. ✓**0,4**

Para classificar os pontos críticos, calculamos as derivadas parciais de segunda ordem:

$$f_{xx}(x,y) = 6x, \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -3 \quad \text{e} \quad f_{yy}(x,y) = 6y.\checkmark \mathbf{0,3}$$

Além disso, o determinante da matriz hessiana é

$$D(x,y) = 36xy - 9.$$

Dessa forma, pelo teste da segunda derivada, deduzimos:

- Como $D(0,0) = -9 < 0$, o ponto crítico $(0,0)$ é um ponto de sela. ✓**0,4**
- Como $D(1,1) = 27 > 0$ e $f_{xx}(1,1) = 6 > 0$, a função f tem um mínimo local em $(1,1)$. ✓**0,4**

Resolução da Questão 5. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, devemos ter

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \text{e} \quad g(x,y) = x^2 + 4y^2 = 8, \checkmark \mathbf{0,4}$$

em que $f(x,y) = xy$ e $g(x,y) = x^2 + 4y^2$. Como $\nabla f(x,y) = (y,x)$ e $\nabla g(x,y) = (2x, 8y)$, temos o sistema não-linear

$$\begin{cases} y = 2x\lambda, \\ x = 8y\lambda, \\ x^2 + 4y^2 = 8. \end{cases} \qquad \checkmark \mathbf{0,4}$$

cujas soluções são $(2,1)$, $(2,-1)$, $(-2,1)$ e $(-2,-1)$. ✓**0,6** Nesses pontos, temos

$$f(2,1) = f(-2,-1) = 2 \quad \text{e} \quad f(-2,1) = f(2,-1) = -2. \checkmark \mathbf{0.2}$$

Portanto, o valor máximo de f é 2 ✓**0,2** enquanto que -2 é o valor mínimo ✓**0,2** de f sobre a elipse.