IMECC-UNICAMP MA-211

Nome: ______________________________ RA: ______________

Turma: ______________ 1^a **PROVA** 28/08/2008

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
Total	

2,5 pts. Questão 1:

(1,0 pts.) (a) Verifique se existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5}{x^5+y^5}$. Justifique sua resposta!

(1,5 pts.) (b) Determine se a função f, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{7x^2+7y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é contínua em $(0,0)$. Justifique!

2,5 pts. Questão 2: Determine a equação do plano tangente ao gráfico da função $f(x,y) = x^2 + xy$ e paralelo ao plano $2x + 3y - z = 0$.

2,5 pts. Questão 3: Determine a derivada direcional da função $z = f(x,y)$, na direção do vetor $(2,2)$ e no ponto $(0,1)$, sendo z definida implicitamente pela equação

$$x^3 + y^3 + z^3 + xyz = 0.$$

Qual o valor máximo da derivada direcional de $z = f(x,y)$, no ponto $(0,1)$?

2,5 pts. Questão 4: Suponha f uma função diferenciável e admita que

$$f(3x+1, 3x-1) = 4.$$

Mostre que: $\dfrac{\partial f(3x+1,3x-1)}{\partial x} = -\dfrac{\partial f(3x+1,3x-1)}{\partial y}.$

Respostas não justificadas não serão consideradas. Boa prova!

2,5 pts. Questão 1:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^5}{x^5+y^5}$.

Sobre o eixo x: $y=0$ e $f(x,0)=1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 1$.

Sobre o eixo y: $x=0$ e $f(0,y)=0 \Rightarrow \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$.

Como $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) \neq \lim\limits_{y\to 0} f(0,y)$, não existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5}{x^5+y^5}$./**1,0 pts.**

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{7x^2+7y^2}, & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0); \\ 1, & \text{se} \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$

$(x,y)\neq(0,0) \Rightarrow f(x,y) = \dfrac{x^3}{7x^2+7y^2}$ e $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{7}x\dfrac{x^2}{x^2+y^2} = 0$.

Pois, $\dfrac{1}{7}x \longrightarrow 0$ e $\dfrac{x^2}{x^2+y^2} \leqslant 1$./**1,0 pts.** Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq f(0,0)$, f não é contínua em $(0,0)$./**0,5 pts.**

2,5 pts. Questão 2:

Plano tangente em (x_0,y_0,z_0): $(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1)\cdot(x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$.
Vetor normal ao plano tangente: $\overrightarrow{n_1} = (f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1)$.
Vetor normal ao plano 2x+3y-z=0: $\overrightarrow{n_2} = (2,3,-1)$./**0,5 pts.**
Planos paralelos $\Rightarrow \overrightarrow{n_1} = \lambda\overrightarrow{n_2} \Rightarrow (x_0, y_0, z_0 = f(x_0,y_0)) = (3,-4,-3)$./**1,5 pts.**
Logo, substituindo o ponto de tangência $(3,-4,-3)$ na primeira equação, obtemos: $z = 2x+2y+3$./**0,5 pts.**

2,5 pts. Questão 3: $D_u f(0,1) = \nabla f(0,1)\cdot\overrightarrow{u}$, $\quad \overrightarrow{u} = \dfrac{1}{\sqrt{8}}(2,2)$.

$\nabla f(0,1) = (f_x(0,1), f_y(0,1)) = ?$
Substituindo $x=0$ e $y=1$ em $x^3+y^3+z^3+xyz=0$, obtemos $z=-1$.
Pondo $F(x,y,z) = x^3+y^3+z^3+xyz$, temos
$f_x(0,1) = -\dfrac{F_x(0,1,-1)}{F_z(0,1,-1)} = \dfrac{1}{3}$ e $f_y(0,1) = -\dfrac{F_y(0,1,-1)}{F_z(0,1,-1)} = -1$./**1,5 pts.**
Portanto, $D_u f(0,1) = (1/3,-1)\cdot(2/\sqrt{8}, 2/\sqrt{8}) = -4/3\sqrt{8}$/**0,5 pts.** e o valor máximo, que ocorre na direção do gradiente, é dado por $|\nabla f(0,1)| = \sqrt{10}/3$/**0,5**.

2,5 pts. Questão 4:

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(3x+3, 3x-1)] = \frac{\partial}{\partial x}[4] \overset{\text{Reg.da Cadeia}}{\Rightarrow} 3\frac{\partial f}{\partial x}(3x+3,3x-1) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(3x+3,3x-1) = 0$$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(3x+3, 3x-1) = -\dfrac{\partial f}{\partial y}(3x+3, 3x-1)$/**2,5pts.**