MA111 - Cálculo I - 2s 2015

Turmas Y e Z

Gabarito da Prova 3 - 27/11/2015

Q1. (3.0) Calcule as seguintes integrais

(a) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^7(x)\cos^3(x)\,dx$

Resposta: Re-escrevemos

$$\int \operatorname{sen}^7(x)\cos^3(x)\,dx = \int \operatorname{sen}^7(x)\cos^2(x)\cos(x)\,dx$$
$$= \int \operatorname{sen}^7(x)\left(1-\operatorname{sen}^2(x)\right)\cos(x)dx = \int (\operatorname{sen}^7(x)-\operatorname{sen}^9(x))\cos(x)dx = I.\ (0.3)$$

Utilizando a mudança de variáveis $y = \operatorname{sen}(x)$ e $dy = \cos(x)\,dx$, (0.3) obtemos

$$\begin{aligned} I &= \int (y^7 - y^9)\,dy = \frac{y^8}{8} - \frac{y^{10}}{10} + k\ (0.2) \\ &= \frac{\operatorname{sen}^8(x)}{8} - \frac{\operatorname{sen}^{10}(x)}{10} + k\ (0.2) \end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(e^x-1)^2}\,dx$

Resposta: Fazendo a mudança de variáveis $y = e^x - 1$ e $dy = e^x\,dx$, (0.4) obtemos

$$\int \frac{e^x}{(e^x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{y^2}\,dy = -\frac{1}{y} + k = -\frac{1}{e^x-1} + k\ (0.2) + (0.2) + (0.2)$$

(c) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2-1}\,dx$

Resposta: Como $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, utilizamos frações parciais. (0.2) Logo,

$$\frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{(A+B)x + (-A+B)}{(x+1)(x-1)}.\ (0.2)$$

Portanto,

$$\begin{cases} A+B = 2 \\ -A+B = 1, \end{cases}$$

de onde concluímos que $A = \frac{1}{2}$ e $B = \frac{3}{2}$. (0.2) Assim,

$$\int \frac{2x+1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x-1| + k\ (0.4)$$

Obse: esquecer a constante k (-0.1)

Q2. (2.5)

(1.2)(a) Calcule a derivada da $h(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{8} \operatorname{tg}(t + e^{2+t^4})\,dt$.

Resposta: Antes de derivar, vamos reescrever a integral da seguinte forma,

$$h(x) = \int_{x^2}^{8} \operatorname{tg}(t + e^{2+t^4})\,dt = -\int_{8}^{x^2} \operatorname{tg}(t + e^{2+t^4})\,dt. \quad (0.3)$$

Observemos que

$$h(x) = f(g(x)) \text{ onde } f(x) = -\int_{8}^{x} \operatorname{tg}(t + e^{2+t^4})\,dt \text{ e } g(x) = x^2. \quad (0.3)$$

Daí, pleo Teorema Fundamental do Cálculo e a regra da cadeia, obtemos

$$h'(x) = -\operatorname{tg}(x^2 + e^{2+(x^2)^4})(x^2)' = -2x\operatorname{tg}(x^2 + e^{2+x^8}). \quad (0.6)$$

(1.3)(b) Discuta a convergência ou divergência da integral imprópria $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^{1/4}}\,dx$. Se for convergente, encontre o valor.

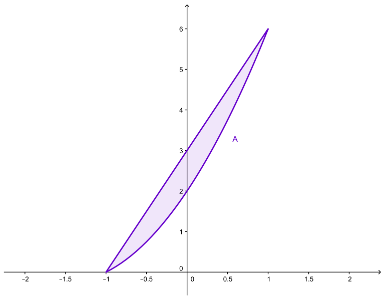
Resposta: Pela definição de integral imprópria,

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^{1/4}}\,dx &= \lim_{a\to+\infty} \int_{0}^{a} (1+x)^{-\frac{1}{4}}\,dx \quad (0.3)\\
&= \lim_{a\to+\infty} \frac{4}{3}(1+x)^{\frac{3}{4}}\Big|_{0}^{a} \quad (0.4)\\
&= \lim_{a\to+\infty} \left(\frac{4}{3}(1+a)^{\frac{3}{4}} - \frac{4}{3}\right) = +\infty. \quad (0.4)
\end{aligned}$$

Portanto a integral diverge. (0.2)

Q3. (2.5) (1.5)(a) Considere as funções $f(x) = 3x + 3$ e $g(x) = x^2 + 3x + 2$. Calcule a área da região delimitada pelos gráficos de f e g.

Resposta: Vamos encontrar onde os gráficos de interceptam. Para isso, vamos achar os valores de x tais que $f(x) = g(x)$, ou seja, $3x + 3 = x^2 + 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Logo, os pontos de interseção dos dois gráficos são $x = -1$ e $x = 1$. (0.4)



Como $3x + 3 \geq x^2 + 3x + 2$ no intervalo $[-1, 1]$, a área é dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{-1}^{1} 3x + 3 - (x^2 + 3x + 2)\, dx = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx \text{ (0.7)} \\ &= \left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_{-1}^{1} = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}. \text{ (0.4)} \end{aligned}$$

(1.0)(b) Determine para que valores de c a reta $x = c$ divide a região dada no item (a) em duas regiões de igual área. Justifique sua resposta.

Resposta: Queremos achar $c \in [-1, 1]$ tal que

$$\int_{-1}^{c} (1 - x^2)\, dx = \int_{c}^{1} (1 - x^2)\, dx \text{ (0.5)}$$

Assim,

$$\int_{c}^{1} (1-x^2)\, dx = \int_{-1}^{c} (1-x^2) dx \Leftrightarrow \left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_{c}^{1} = \left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_{-1}^{c} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{3} - c + \frac{c^3}{3} = c - \frac{c^3}{3} + 1 - \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{c^3}{3} - 2c = 0 \Leftrightarrow c\left(\frac{c^2}{3} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow c = 0,\ c = \pm\sqrt{3}$$

Como $\pm\sqrt{3}$ não pertencem ao intervalo de integração $[-1, 1]$, então, a única reta que divide a região em duas áreas iguais, é a reta $x = 0$. (0.5)

Outra forma: Como já sabemos o valor da área entre as curvas $f(x)$ e $g(x)$, então para achar a reta $x = c$ com $c \in [-1, 1]$, que divide a área em duas regiões de mesma área, devemos encontrar a que satisfaça

$$\int_{-1}^{c} (1 - x^2)\, dx = \int_{c}^{1} (1 - x^2)\, dx = \frac{2}{3} \text{ (0.5)}$$

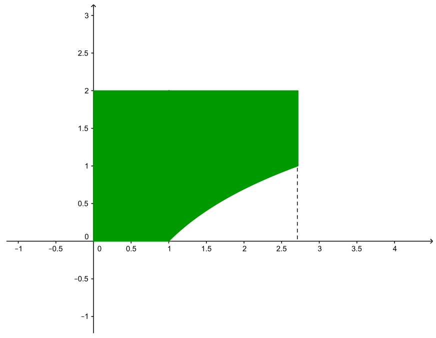
Assim, utilizando uma das igualdades,

$$\int_{c}^{1} (1 - x^2)\, dx = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Big|_{c}^{1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{3} - c + \frac{c^3}{3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{c^3}{3} - c = 0 \Leftrightarrow c = 0,\ c = \pm\sqrt{3}$$

e concluímos como acima. (0.5)

Q4. (2.0) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq e,\ 0 \leq y \leq 2 \text{ e } y \geq \ln x\}.$$



Resposta:
Cascas cilíndricas: Temos que o volume é dado por

$$V = 2\pi \int_0^e 2x - 2\pi \int_1^e x \ln x dx \ (1.0)$$

Por integração por partes,

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + k. \ (0.5)$$

Portanto,

$$V = 2\pi x^2 \Big|_0^e - 2\pi \Big(\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4}\Big)\Big|_1^e = 2\pi(e^2 - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{\pi}{2}(3e^2 - 1) \ (0.5)$$

Seções transversais: Vamos dividir o nosso conjunto em duas regiões. A primeira, será a região de $1 \leq y \leq 2$, e a segunda região, será a região de $0 \leq y \leq 1$.

Para a primeira região, a área das seções transversais do sólido obtido pela rotação em torno do eixo y é dada por

$$A_1(y) = \pi(e)^2 = \pi e^2.$$

Observe que

$$y = \ln x \Leftrightarrow x = e^y.$$

Assim, para a segunda região, temos

$$A_2(y) = \pi(e^y)^2 = e^{2y}.$$

(0.5) Portanto, o volume do nosso sólido é dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 A_1(y)\, dy + \int_0^1 A_2(y)\, dy = \int_1^2 \pi e^2\, dy + \int_0^1 \pi e^{2y}\, dy \ (1.0) \\ &= (\pi e^2)_1^2 + \left(\pi \frac{e^{2y}}{2}\right)_0^1 = \pi e^2 + \pi \frac{e^2}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(3e^2 - 1) \ (0.5) \end{aligned}$$