ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

$3^{\underline{a}}$ Prova de MA111 — Turmas A e B — 30/05/2014

NOME: GABARITO **RA:**

ASSINATURA:

1(a) (0,6 ponto) Enuncie os Teoremas de Rolle e do Valor Médio.
1(b) (0,7 ponto) Mostre que, se $a \neq 0$ e $b^2 - 3ac < 0$, então a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ tem exatamente uma raiz real.
1(c) (0,7 ponto) Seja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivável tal que $f(1) = 8$ e $f'(x) \geq 3$ para todo $x \in (1, 5)$. Qual o menor valor possível para $f(5)$? Justifique.

2. (2,0 pontos) Seja r uma reta que passa pelo ponto $(4, 3)$ e forma um triângulo com os eixos coordenados positivos. Determine a equação de r para que a área desse triângulo seja mínima.

3. (3,0 pontos) Seja

$$f(x) = \frac{6 - 6x}{x^2}.$$

Pede-se:
(a) D_f.
(b) Intervalos de crescimento e decrescimento, máximos e mínimos locais.
(c) Concavidade e pontos de inflexão.
(d) Assíntotas.
(e) Esboço do gráfico.
(f) Imagem de f.

4. Calcular:

$$(\mathbf{a})(1,0) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 + 9x^2}} \qquad (\mathbf{b})(1,0) \int x^2 \ln x \, dx$$

$$(\mathbf{c})(1,0) \int \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 2x + 1} dx \qquad (\mathbf{d})(1,0) \lim_{x \to \pi/4} (1 - \operatorname{tg} x) \sec 2x$$

1(a). Teorema de Rolle: Seja f uma função contínua em $[a,b]$, derivável em (a,b) e tal que $f(a)=f(b)$. Então existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

Teorema do Valor Médio: Seja f uma função contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b). Então existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

1(b). Seja $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ e suponhamos que existam $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$, tal que $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Como f é contínua em $[\alpha,\beta]$ e derivável em (α,β), pelo Teorema de Rolle, existe $c\in(\alpha,\beta)$ tal que $f'(c)=0$. Mas

$0=f'(x)=3ax^2+2bx+c$, $\Delta=4b^2-4\cdot 3ac=4(b^2-3ac)<0$

e portanto a equação $f'(x)=0$ não possui solução real. Assim temos uma contradição e logo não existem $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\neq\beta$ tal que $f(\alpha)=f(\beta)=0$.

1(c). Como f é contínua em $[1,5]$ e derivável em $(1,5)$, pela T.V.M. existe $c\in(1,5)$ tal que

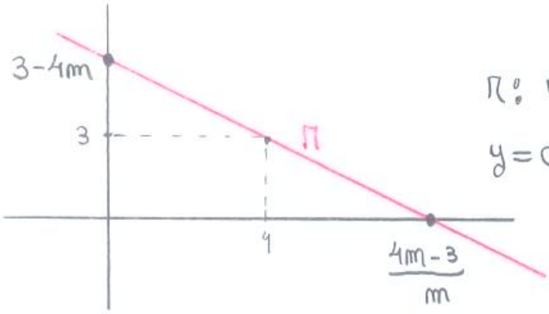
$$f'(c)=\frac{f(5)-f(1)}{5-1}.$$

Por hipótese temos que

$$\frac{f(5)-8}{4}=\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c)\geqslant 3$$

$$\Longrightarrow f(5)\geqslant 8+12=20$$

2)



$r: y = 3 + m(x-4)$

$y=0 \Rightarrow mx - 4m + 3 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{4m-3}{m}}$

$x = 0 \Rightarrow \boxed{y = 3-4m}$

$$\text{Área} = A(m) = \frac{4m-3}{m} \cdot (3-4m)\frac{1}{2} = -\frac{(4m-3)^2}{2m}$$

$$A'(m) = -\frac{2(4m-3)4 \cdot 2m - 2(4m-3)^2}{4m^2} = -\frac{(4m-3)(16m-8m+6)}{4m^2}$$

$$= -\frac{(4m-3)(8m+6)}{4m^2}$$

$$A'(m) = 0 \iff m = \frac{3}{4} \text{ ou } m = -\frac{3}{4}$$

$\boxed{m = 3/4}$ $\quad y = 3 + \frac{3}{4}(x-4) \qquad x = 0 \Rightarrow y = 0$ (não serve)

$\boxed{m = -3/4}$ $\quad y = 3 - \frac{3}{4}(x-4) \Rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{4}x + 6}$ RESPOSTA

OUTRA FORMA: $r: y = ax + b \qquad (4,3) \in r \Rightarrow 4a + b = 3$

$x = 0 \Rightarrow \boxed{y = b} \qquad \Rightarrow \boxed{a = \frac{3-b}{4}}$

$$y = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a} = -b\,\frac{4}{3-b} = -\frac{4b}{3-b}$$

$$A(b) = \frac{1}{2}b \cdot \frac{-4b}{3-b} = -\frac{2b^2}{3-b} = \frac{2b^2}{b-3}$$

$$A'(b) = \frac{4b(b-3) - 2b^2}{(b-3)^2} = \frac{2b^2 - 12b}{(b-3)^2} = \frac{2b(b-6)}{(b-3)^2}$$

$$A'(b) = 0 \iff \boxed{b = 0 \text{ ou } b = 6}$$

$b = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x$ (não serve)

$b = 6 \Rightarrow a = -\frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{4}x + 6}$ RESPOSTA

3) $\displaystyle f(x) = \frac{6-6x}{x^2}$

3(a) (0,2) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

3(b) (0,7) $\displaystyle f'(x) = \frac{-6x^2 - 2x(6-6x)}{x^4} = \frac{6x^2-12x}{x^4} = 6\,\frac{x-2}{x^3}$

x^3	$-$	0	$+$	2	$+$
$x-2$	$-$	0	$-$	2	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	2	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	2	$\nearrow$

f é crescente em $(-\infty,0)$ e $(2,+\infty)$ e decrescente em $(0,2)$

$x=2$ é ponto de mínimo local

3(c) (0,7) $\displaystyle f''(x) = 6\,\frac{x^3 - 3x^2(x-2)}{x^6} = 6\,\frac{2x^2(-x+3)}{x^6} = 12\,\frac{3-x}{x^4}$

$3-x$	$+$	0	$+$	3	$-$
$f''(x)$	$+$	0	$+$	3	$-$
$f(x)$	$\cup$	0	$\cup$	3	$\cap$

f é concava para cima em $(-\infty,0)$ e $(0,3)$ e concava para baixo em $(3,+\infty)$.

$x=3$ é ponto de inflexão de f

3(d) (0,7) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{6-6x}{x^2} = \dfrac{6}{0^+} = +\infty$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{6-6x}{x^2} = \frac{6}{0^+} = +\infty$$

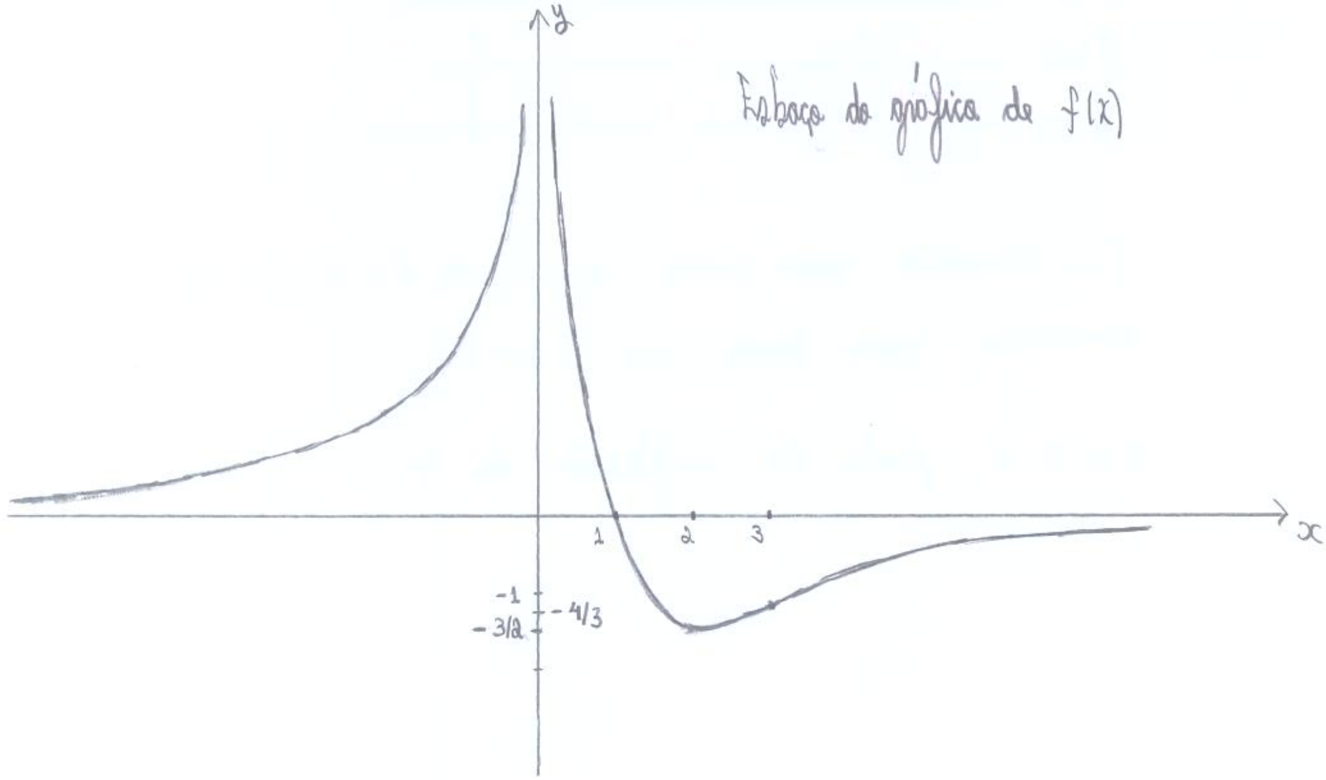
A reta $x=0$ é assíntota vertical do gráfico de f

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{6-6x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{6}{x^2} - \frac{6}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{6}{x^2} - \frac{6}{x} = 0$$

A reta $y=0$ é assíntota horizontal do gráfico de f

3(e) (0,5) $f(2) = -3/2$, $f(3) = -4/3$



3(f) (0,2) Imagem de $f = [-3/2, +\infty)$

4(a). $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+9x^2}} = \int \frac{\frac{1}{3}\sec^2 u\, du}{\frac{1}{9}\operatorname{tg}^2 u\, \sec u}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}\operatorname{tg} u \\ dx = \frac{1}{3}\sec^2 u\, du \end{cases}$$

$$= 3\int \frac{\sec u\, du}{\operatorname{tg}^2 u} = 3\int \frac{\cos^2 u\, du}{\operatorname{sen}^2 u\, \cos u}$$

$$\begin{cases} 1+\operatorname{tg}^2 u = \sec^2 u \\ 1+9x^2 = \sec^2 u \end{cases}$$

0,3

$$= 3\int \frac{\cos u\, du}{\operatorname{sen}^2 u} = 3\int \frac{dv}{v^2}$$

$$\begin{cases} v = \operatorname{sen} u \\ dv = \cos u\, du \end{cases}$$

$$= -3\,\frac{1}{v} + k$$

0,3

$$= -3\,\frac{1}{\operatorname{sen} u} + k = -3\,\frac{\cos u}{\operatorname{sen} u\, \cos u} = -3\,\frac{\sec u}{\operatorname{tg} u}$$

$$= -3\,\frac{\frac{1}{3}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}}{\frac{1}{3}\operatorname{tg} u} = -\frac{\sqrt{1+9x^2}}{x} + k$$

0,4

4(b). $$\int \underbrace{(\ln x)}_{u}\,\underbrace{x^2\, dx}_{dv} = uv - \int v\, du$$

$$\begin{cases} u = \ln x \\ du = \frac{dx}{x} \end{cases}$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\,\frac{dx}{x}$$

$$\begin{cases} dv = x^2\, dx \\ v = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\,\frac{x^3}{3} + k = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + k$$

4(c). $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-2x+1} = 1 + \dfrac{7x+3}{(x-1)^2}$

$$\int \frac{x^2+5x+4}{x^2-2x+1}\,dx = x + \int \frac{7x+3}{(x-1)^2}\,dx \qquad \begin{cases} u = x-1 \\ du = dx \end{cases}$$

$$= x + \int \frac{7(u+1)+3}{u^2}\,du = x + \int \frac{7u+10}{u^2}\,du =$$

$$= x + 7\int \frac{du}{u} + 10\int u^{-2}\,du = x + 7\ln|u| - \frac{10}{u} + k$$

$$= x + 7\ln|x-1| - \frac{10}{x-1} + k$$

4(d). $\lim\limits_{x\to\pi/4} (1-\operatorname{tg} x)\sec 2x = \lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{1-\operatorname{tg} x}{\cos 2x}$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\pi/4} \frac{-\sec^2 x}{-2\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to\pi/4} \frac{1}{2\cos^2 x \cdot \operatorname{sen} 2x}$$

$$= \frac{1}{2\cos^2\frac{\pi}{4}\cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1} = 1 \;/\!/$$

OUTRA FORMA:

$$\lim_{x\to\pi/4} (1-\operatorname{tg} x)\sec 2x = \lim_{x\to\pi/4} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x \cdot \cos 2x}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to\pi/4} \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x\cos 2x + 2\cos x\operatorname{sen} 2x} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2} + 2\cos\frac{\pi}{4}\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 0 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1} = 1 \;/\!/$$