Q1.(2.0) Calcule

(0.6)(a) $f'(x)$ se $f(x) = \dfrac{x^7 - \ln x}{3 + \sqrt{x}}$

Resolução: Usando a regra do quociente

$$f'(x) = \frac{(x^7 - \ln x)'(3 + \sqrt{x}) - (x^7 - \ln x)(3 + \sqrt{x})'}{(3 + \sqrt{x})^2} \quad (0.2)$$

$$= \frac{\left(7x^6 - \frac{1}{x}\right)(3 + \sqrt{x}) - (x^7 - \ln x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(3 + \sqrt{x}\right)^2}. \quad (0.4)$$

(0.6)(b) $g'(x)$ se $g(x) = (2^x - x^2)(\sqrt[3]{x} + \operatorname{sen} x)$

Resolução: Usando a regra do produto

$$g'(x) = (2^x - x^2)'(\sqrt[3]{x} + \operatorname{sen} x) + (2^x - x^2)(\sqrt[3]{x} + \operatorname{sen} x)' \quad (0.2)$$

$$= (2^x \ln 2 - 2x)\left(\sqrt[3]{x} + \operatorname{sen}(x)\right) + \left(2^x - x^2\right)\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \cos(x)\right) \quad (0.4)$$

(0.8)(c) $\dfrac{dy}{dx}$ sendo y dada implicitamente pela equação: $(y + x)^5 = x + \operatorname{tg}(y)$

Resolução: Derivando implicitamente

$$5\,(y + x)^4\,(y' + 1) = 1 + \sec^2(y)y'. \quad (0.5)$$

Isolando o y':

$$5\,(y + x)^4\,y' + 5\,(y + x)^4 = 1 + \sec^2(y)y' \Rightarrow$$

$$5\,(y + x)^4\,y' - \sec^2(y)y' = 1 - 5\,(y + x)^4 \Rightarrow$$

$$y'\left(5\,(y + x)^4 - \sec^2(y)\right) = 1 - 5\,(y + x)^4 \Rightarrow$$

$$y' = \frac{1 - 5\,(y + x)^4}{5\,(y + x)^4 - \sec^2(y)}. \quad (0.3)$$

Q2.(1.5)

(0.5)(a) Suponha que a reta tangente à curva $y = g(x)$ em $x = 2$ é dada por $y = -3x + 4$. Determine os valores de $g(2)$ e $g'(2)$ ou diga se não é possível determiná-los com a informação dada.

Resolução: Como a reta tangente em $x = 2$ tem inclinação -3, por definição temos que $g'(2) = -3$. (0.2)

Por outro lado, a equação da reta tangente no ponto $(2, g(2))$ é dada por

$$y - g(2) = g'(2)(x - 2) = -3(x - 2) = -3x + 6,$$

isto é

$$y = -3x + 6 + g(2).$$

Portanto devemos ter que $-3x + 6 + g(2) = -3x + 4$, do que segue que $g(2) = -2$. (0.3)

(1.0)(b) Seja f uma função diferenciável tal que $f(0) = 4$ e $f'(0) = 5$. Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $h(x) = \sqrt{x + f(x)}$ no ponto $(0, 2)$.

Resolução: Usando a regra da cadeia obtemos

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + f(x)}}\left(1 + f'(x)\right), \text{ (0.5)}$$

assim em $x = 0$

$$h'(0) = \frac{1}{2\sqrt{0 + f(0)}}\left(1 + f'(0)\right) = \frac{1}{2\sqrt{4}}(1 + 5) = \frac{3}{2}. \text{ (0.2)}$$

A reta tangente no ponto $(0, 2)$ é dada por

$$y - h(0) = h'(0)(x - 0) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = \frac{3}{2}(x - 0) = \frac{3}{2}x,$$

isto é

$$y = \frac{3}{2}x + 2. \text{ (0.3)}$$

Q3.(2.5)

(1.5)(a) Mostre, utilizando a definição, que a função $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 0 \\ e^x \cos x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ é derivável em $x = 0$. Dica: use a regra de L'Hospital.

Resolução: Devemos mostrar que existe

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x}. \ \textcolor{blue}{(0.2)}$$

Como f está definida por partes, para provar que o limite existe é necessário calcular os limites laterais

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{(x+1) - 1}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{x} = 1. \ \textcolor{blue}{(0.3)}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x \cos x - 1}{x} \ \textcolor{blue}{(0.3)}$$

Neste caso, o limite é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$, e pode ser calculado usando a regra de L'Hospital

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x \cos x - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^x \cos x - e^x \operatorname{sen} x}{1} = 1. \ \textcolor{blue}{(0.5)}$$

Como os dois limites laterais sao iguais, o limite existe e é igual a 1, provando que a função é derivável em $x = 0$. $\textcolor{blue}{(0.2)}$

(1.0)(b) Calcule $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$

Resolução: Temos uma indeterminação da forma 1^∞. Escrevemos

$$\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)}, \ \textcolor{blue}{(0.2)}$$

Notemos que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)$ é uma forma indeterminada do tipo $\infty \cdot 0$. Reescrevendo o limite como

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

ainda temos uma forma indeterminada, mas agora é da forma $\frac{0}{0}$. Usamos regra de L'Hospital

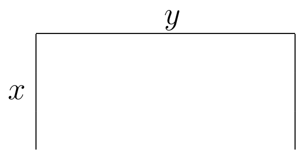
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\left(1+\frac{3}{x}\right)}\left(-\frac{3}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} 3 \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{x}\right)} = 3. \ \textcolor{blue}{(0.6)}$$

Assim, como a função exponencial é contínua

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)} = \exp\left(\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)\right) = e^3. \ \textcolor{blue}{(0.2)}$$

Q4.(1.5) Deseja-se confeccionar uma trave para um campo de futebol com uma viga de 18m de comprimento. Encontre as dimensões para que a área do gol seja máxima. Justifique a sua resposta.

Desenho de uma trave



Resolução: Chamando x a altura e y a largura temos que $18 = y + 2x$ isto é $y = 18 - 2x$. A área é dada por $A = xy$. Substituindo y obtemos a área do gol como função de x

$$A(x) = (18 - 2x)x = 18x - 2x^2, \quad (0.6)$$

com derivada

$$A'(x) = 18 - 4x.$$

Logo, único ponto crítico ocorre quando $A'(x) = 0$, ou seja, para $x = 18/4 = 9/2$. Analisamos o sinal da derivada:

$$A'(x) > 0 \text{ para } x < 9/2 \text{ e } A'(x) < 0 \text{ para } x > 9/2$$

portanto $A(x)$ é crescente para $x < 9/2$ e decrescente para $x > 9/2$. Pelo teste da derivada primeira, concluímos que $x = 9/2$ é um ponto de máximo.

(Observação: também poderia ser utilizado o teste da derivada segunda). (0.6)

Para $x = 9/2$, temos que $y = 18 - 2(9/2) = 9$ daí que as dimensões para a área seja máxima são $9/2$ m de altura e 9m de largura. (0.3)

Q5.(2.5) Dadas $f = \dfrac{x+2}{(x-1)^2}$, $\quad f'(x) = -\dfrac{x+5}{(x-1)^3}$ e $\quad f''(x) = \dfrac{2(x+8)}{(x-1)^4}$.

(0.3)(i) Encontre o domínio de f e os pontos de intersecção do gráfico de f com os eixos.

(0.6)(ii) Caso existam, determine as assíntotas horizontais e verticais de f.

(0.6)(iii) Determine os intervalos de crescimento e decrescimento de f, seus pontos de máximo e mínimo e os seus valores.

(0.6)(iv) Determine os intervalos onde f tem concavidade para cima e para baixo e os pontos de inflexão.

(0.4)(v) Esboce o gráfico de f usando as informações obtidas nos itens anteriores.

Resolução: (i) *Domínio:* $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1\}$. (0.1)

Intersecção como o eixo y (ocorre quando $x=0$): $y = \frac{2}{(-1)^2} = 2$. (0.1)

Interseção como o eixo x (ocorre quando $y=0$): $0 = \dfrac{x+2}{(x-1)^2}$, mas isto acontece se e somente se $x+2=0$, isto é, quando $x=-2$. (0.1)

(ii) *Assíntotas verticais:* Note que a única possibilidade de ter assíntota vertical é em $x=1$. De fato

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{(x-1)^2} = +\infty,$$

pois o numerador vai para 3 e o denominador vai para zero por números positivos. Similarmente

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+2}{(x-1)^2} = +\infty.$$

Provando que a reta $x=1$ é assíntota vertical. (0.3)

Assíntotas horizontais: Calculamos os limites para $x\to\pm\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{x-2+\frac{1}{x}} = 0,$$

similarmente

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{x-2+\frac{1}{x}} = 0.$$

Portanto, a reta $y=0$ é a única assíntota horizontal. (0.3)

(iii) Da formula para f' temos o seguinte

$$\begin{aligned} &f'(x) < 0 \text{ se } x < -5 \\ &f'(x) > 0 \text{ se } -5 < x < 1 \\ &f'(x) < 0 \text{ se } x > 1. \end{aligned}$$

Daí que f é crescente no intervalo $(-5,2)$ e decrescente nos intervalos $(-\infty,-5)$ e $(1,+\infty)$. (0.4) Como f' muda de sinal em $x=-5$ de negativo para positivo, pelo teste da derivada primeira, temos un mínimo local em $x=-5$ com valor $f(-5) = -\frac{1}{12}$. (0.2)

(Note que embora f' muda de sinal em $x=1$ não temos máximo ou mínimo local pois $x=1\notin D_f$).

(iv) Da formula para f'' temos o seguinte

$$\begin{aligned} &f''(x) < 0 \text{ se } x < -8 \\ &f''(x) > 0 \text{ se } -8 < x < 1 \\ &f''(x) > 0 \text{ se } x > 1. \end{aligned}$$

Logo, f é côncava para cima nos intervalos $(-8, 1)$ e $(1, \infty)$ e é côncava para baixo no intervalo $(-\infty, -8)$. (0.4) Como f'' muda de sinal em $x = -8$ temos um ponto de inflexão em $x = -8$. (0.2)

(v) Gráfico da f: (0.4)