ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

$2^{\underline{a}}$ Prova de MA111 — Turmas A e B — 25/04/2014

NOME: GABARITO **RA:**

ASSINATURA:

1. (2,0 pontos) Mostre que o ponto $(2,4)$ está na curva $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ e determine as equações da reta tangente e da reta normal à curva nesse ponto.

2. (2,0 pontos) Para quais valores de a e b reais a função

$$f(x) = \begin{cases} ax & se \quad x < 2, \\ ax^2 - bx + 3 & se \quad x \geq 2, \end{cases}$$

é derivável para qualquer x?

3. Calcule:

$$(\mathbf{a})(1,0) \lim_{x \to -\infty} \frac{4 - 3x^3}{\sqrt{x^6 + 9}}, \quad (\mathbf{b})(1,0) \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x - 2}{3x + 1}\right)^{2x}.$$

4(a) (1,0 ponto) Calcule $f'(x)$ se $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}} + (5x - 1)\cos x$.
4(b) (1,0 ponto) Calcule $F'(\pi)$ se

$$F(x) = \frac{\operatorname{sen} f(x)}{4 + g(x)}$$

onde f e g são funções deriváveis satisfazendo $f(\pi) = -\pi$, $f'(\pi) = -1$, $g(\pi) = -3$ e $g'(\pi) = 2$.

5. Sejam $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \frac{x^2 - x}{1 + 3x^2} \quad \text{e} \quad g(x) = a(x-5)^2 - b(x-2)^3,$$

onde a e b são constantes reais positivas.
(a) (1,0 ponto) Prove que $f(-1)$ é o valor máximo de f.
(b) (1,0 ponto) Prove que existe $x_1 \in (0,1)$ tal que $f(x_1)$ é o valor mínimo de f.
(c) (1,0 ponto) Prove que g tem pelo menos uma raiz no intervalo $(2,5)$.

(1) $C: x^3 + y^3 - 9xy = 0$, $P = (2,4)$

$x = 2$ e $y = 4 \Rightarrow x^3 + y^3 - 9xy = 8 + 64 - 9 \cdot 2 \cdot 4 = 72 - 72 = 0$

$\Rightarrow P \in C$

$0 = x^3 + y^3 - 9xy \Rightarrow 0 = 3x^2 + 3y^2 y' - 9y - 9xy'$

$\Rightarrow y'(3y^2 - 9x) = 9y - 3x^2 \Rightarrow \boxed{y' = \dfrac{3y - x^2}{y^2 - 3x}}$

$x = 2$ e $y = 4 \Rightarrow y' = \dfrac{24}{30} = \dfrac{4}{5}$

<u>reta tangente</u> : $y = 4 + \frac{4}{5}(x-2) = \frac{4}{5}x + \frac{12}{5}$

<u>reta normal</u> : $y = 4 - \frac{5}{4}(x-2) = -\frac{5}{4} + \frac{13}{2}$

2) $$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{se } x<2, \\ ax^2-bx+3, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

(i) $f(x)$ é um polinômio se $x<2$ e se $x>2$.
Portanto f é derivável em todo ponto $x \neq 2$.

(ii) Para que f seja derivável em $x=2$, f deve ser contínua em $x=2$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x>2}} (ax^2-bx+3) = 4a-2b+3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 2 \\ x<2}} ax = 2a \end{cases}$$

Devemos ter $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$, isto é $\boxed{2a-2b+3=0 \quad (\mathrm{I})}$

(iii) $$\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} (4a-b+ah) = 4a-b \\ \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0 \\ h<0}} \left(a + \dfrac{-2a+2b-3}{h}\right) \overset{(\mathrm{I})}{=\!=} a \end{cases}$$

Devemos ter $4a-b=a$, isto é, $\boxed{b=3a \quad (\mathrm{II})}$

$$\begin{matrix} (\mathrm{I}) \\ (\mathrm{II}) \end{matrix} \begin{cases} 2a-2b+3=0 \\ b=3a \end{cases} \Longrightarrow 0 = 2a-2(3a)+3 = -4a+3$$
$$\Longrightarrow \boxed{a = 3/4} \text{ e } \boxed{b = \frac{9}{4}}$$

3(a): $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4-3x^3}{\sqrt{x^6+9}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\frac{4}{x^3}-3}{-\frac{\sqrt{x^6+9}}{(-x)^3}}$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{4}{x^3}-3}{-\sqrt{\frac{x^6+9}{(-x)^6}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{4}{x^3}-3}{-\sqrt{1+\frac{9}{x^6}}}$$

$$= \frac{0-3}{-\sqrt{1+0}} = 3$$

3(b): $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{3x+1}{3x-2}\right)^{-2x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{(3x-2)+3}{3x-2}\right)^{-2x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{3x-2}\right)^{-2x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x-2/3}\right)^{-2x} = \lim_{y\to+\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{-2y-4/3}$$

$$= \lim_{y\to+\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{-4/3} \cdot \left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-2}$$

$$= 1^{-4/3} \cdot e^{-2} = e^{-2}$$

$$\begin{cases} y = x - 2/3 \\ x = y + 2/3 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} (x-2/3) = +\infty$$

$\underline{\underline{4(a)}}$: $f(x) = e^{\sqrt{2x+1}} + (5x-1)\cos x$

$$\left(\sqrt{2x+1}\right)' = \frac{1}{2}(2x+1)^{-1/2}(2x+1)' = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$f'(x) = e^{\sqrt{2x+1}} \cdot \left(\sqrt{2x+1}\right)' + 5\cos x + (5x-1)(-\operatorname{sen} x)$$

$$= e^{\sqrt{2x+1}} \frac{1}{\sqrt{2x+1}} + 5\cos x - (5x-1)\operatorname{sen} x$$

$\underline{\underline{4(b)}}$: $F(x) = \dfrac{\operatorname{sen} f(x)}{4+g(x)}$, $f(\pi) = -\pi$, $f'(\pi) = -1$, $g(\pi) = -3$, $g'(\pi) = 2$

$$F'(x) = \frac{(\operatorname{sen} f(x))'(4+g(x)) - (\operatorname{sen} f(x))(4+g(x))'}{(4+g(x))^2}$$

$$= \frac{(\cos f(x)) f'(x)(4+g(x)) - (\operatorname{sen} f(x)) g'(x)}{(4+g(x))^2}$$

$$F'(\pi) = \frac{(\cos f(\pi)) f'(\pi)(4+g(\pi)) - (\operatorname{sen} f(\pi)) g'(\pi)}{(4+g(\pi))^2}$$

$$= \frac{(\cos(-\pi))(-1)(4-3) - \operatorname{sen}(-\pi)\cdot 2}{(4-3)^2}$$

$$= \frac{(-1)(-1)\cdot 1 - 0 \cdot 2}{1^2} = 1$$

$\underline{\underline{5(a)}}$: $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{1+3x^2}$, $f(-1) = \dfrac{1+1}{1+3} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$$f(x) \leq f(-1) \iff \frac{x^2-x}{1+3x^2} \leq \frac{1}{2} \iff 2x^2 - 2x \leq 1 + 3x^2$$

$$\iff 0 \leq x^2 + 2x + 1 \iff 0 \leq (x+1)^2 \quad \underline{\text{VERDADE SEMPRE}}$$

Logo $f(-1)$ é o valor máximo de f.

$\underline{\underline{5(b)}}$: Como f é contínua no intervalo $[-1,1]$, pelo Teorema de Weierstrass, existe $x_1 \in [-1,1]$ tal que $f(x) \geq f(x_1)$, $\forall\, x \in [-1,1]$.

Temos que

$$\left.\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \implies f(x) = \dfrac{\overset{\leq 0}{x}\,\overset{\leq 0}{(x-1)}}{1+3x^2} \geq 0 \\ x = 1 \implies f(1) = 0 \\ x = 1/2 \implies f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+\frac{3}{4}} = -\dfrac{1}{7} < 0 \end{cases}\right\} \implies x_1 \in (0,1)$$

$\underline{\underline{5(c)}}$: $g(x) = a(x-5)^2 - b(x-2)^3$, $a>0$ e $b>0$.

$$\begin{cases} g(2) = 9a > 0 \ , \quad g(5) = -27b < 0 \\ g(x) \text{ é contínua em } [2,5] \text{ pois é um polinômio} \end{cases}$$

$$\Big\Downarrow \text{ Teorema do Anulamento}$$

$$\exists \quad c \in (2,5) \text{ tal que } g(c) = 0$$