Q1.(2.5) Seja $f(x) = |x-4| + |x+4|$.

(1.0)(a) Determine o domínio da função, expresse $f(x)$ sem usar módulo e esboce o seu gráfico.

Solução: Como o domínio da função $h(x) = |x|$ é $\mathbb{R}$, então a função $f(x) = |x-4|+|x+4|$ não possui nenhuma restrição em seu domínio. Portanto, $D_f = \mathbb{R}$. (0.1)

Agora, observe que $|x-4| = 0$, quando $x = 4$, e $|x+4| = 0$, quando $x = -4$. Portanto, vamos estudar os intervalos $x < -4$, $-4 \leq x < 4$, $x \geq 4$.

Quando $x < -4$, temos

$$\begin{aligned} |x-4| &= -(x-4) = -x+4 \\ |x+4| &= -(x+4) = -x-4 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = -x+4-x-4 = -2x.$$

Quando $-4 \leq x < 4$, temos

$$\begin{aligned} |x-4| &= -(x-4) = -x+4 \\ |x+4| &= x+4 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = -x+4+x+4 = 8.$$

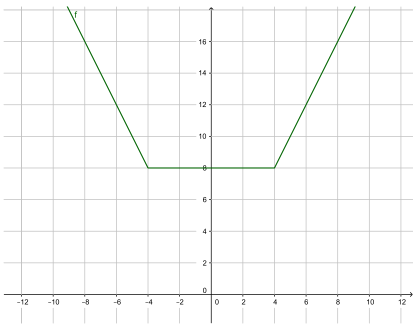
Quando $x \geq 4$, temos

$$\begin{aligned} |x-4| &= x-4 \\ |x+4| &= x+4 \end{aligned} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = x-4+x+4 = 2x.$$

Concluindo, obtemos

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x < -4 \\ 8, & -4 \leq x < 4 \\ 2x, & x \geq 4. \end{cases} \quad (0.6)$$

Gráfico da f: (0.3)



(0.5)(b) Verifique se a função é par, ímpar ou injetora. Justifique sua resposta provando ou dando contra-exemplo.

Solução: Para verificar se a função f é par ou ímpar, vamos fazer o seguinte cálculo:

$$f(-x) = |-x-4| + |-x+4| = |-(x+4)| + |-(x-4)| = |x+4| + |x-4| = f(x),$$

de onde concluímos que f é uma função par. (0.3)

Como a função é par, não é injetora. (0.2)

(0.5)(c) Encontre todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $10 \leq f(x) < 12$.

Solução: Já eliminamos o módulo da f no no item (a). Sendo assim, estudar os valores de x tais que $10 \leq f(x) < 12$, é equivalente a estudar quando $10 \leq -2x < 12$ e $10 \leq 2x < 12$. Temos

$$10 \leq -2x < 12 \quad \Leftrightarrow \quad -5 \geq x > -6,$$

$$10 \leq 2x < 12 \quad \Leftrightarrow \quad 5 \leq x < 6,$$

ou seja, $10 \leq f(x) < 12$ é verdade para $x \in (-6, -5] \cup [5, 6)$. (0.5)

(0.5)(d) Seja $g(x) = \sqrt{x}$. Encontre $f \circ g$ e $g \circ f$ e seus domínios.

Solução: Temos

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = |\sqrt{x} - 4| + |\sqrt{x} + 4|,$$

e seu domínio é dado pelo domínio de $\sqrt{x}$, ou seja, $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{|x - 4| + |x + 4|}$$

e como $|x - 4| + |x + 4| \geq 0$, seu domínio será todos os reais. (0.5)

Q2.(3.0) Calcule o limite ou prove que não existe:

(0.7)(a) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{9-x}{3-\sqrt{x}}$

Solução:

$$\lim_{x\to 9}\frac{9-x}{3-\sqrt{x}}\overset{(0.2)}{=}\lim_{x\to 9}\frac{(9-x)(3+\sqrt{x})}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}\overset{(0.2)}{=}\lim_{x\to 9}\frac{(9-x)(3+\sqrt{x})}{9-x}\overset{(0.2)}{=}\lim_{x\to 9}3+\sqrt{x}\overset{(0.1)}{=}3+\sqrt{9}=6$$

(0.8)(b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$

Solução:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x-1},\ (0.2)$$

assim, para estudar este limite, precisamos calcular seus limites laterais. Sendo assim,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1,\ (0.2)$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=1.\ (0.2)$$

Como os limites laterais existem, mas não coincidem, segue que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$ não existe. (0.2)

(0.8)(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen} x}$

Solução: Usando o fato de que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}=1$, (0.2) obtemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen} x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}\frac{5x}{\operatorname{sen} x}\overset{(0.5)}{=}5\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}\overset{(0.1)}{=}5.$$

(0.7)(d) $\lim\limits_{x\to 0}x^6\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

Solução: Para resolver este limite, vamos utilizar o teorema do confronto. Para isto observe que,

$$-1\le\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\le 1\Rightarrow -x^6\le x^6\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)\le x^6,\ (0.3)$$

e além disso,

$$\lim_{x\to 0}-x^6=\lim_{x\to 0}x^6=0.\ (0.2)$$

Portanto, pelo teorema do confronto, concluímos que

$$\lim_{x\to 0}x^6\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)=0.\ (0.2)$$

Q3.(1.5) Encontre os valores a e b, se possível, tais que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1, & \text{se } x < 1, \\ ax + b, & \text{se } 1 \leq x \leq 2, \\ x^2 - 2, & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

seja contínua para todo x. Justifique.

Solução: Como $x^2 + x - 1$, $ax + b$ e $x^2 - 2$, são polinômios, e como todos os polinômios são funções contínuas, segue que f é contínua em $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$. (0.3) Assim, basta verificar a definição de continuidade para a f nos pontos $x = 1$ e $x = 2$.
Calculando os limites laterais em $x = 1$, obtemos

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + x - 1) = 1,$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (ax + b) = a + b.$$

Como queremos que f seja contínua, devemos ter que

$$f(1) = a + b = 1. \text{ (0.5)}$$

Por outro lado, para $x = 2$, obtemos

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (ax + b) = 2a + b,$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 2) = (-2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2.$$

Como queremos que f seja contínua, devemos ter

$$f(2) = 2a + b = 2. \text{ (0.5)}$$

Portanto, a e b devem satisfazer

$$\begin{cases} a + b &= 1 \\ 2a + b &= 2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, concluímos que para f ser contínua, devemos ter $a = 1$ e $b = 0$. (0.2)

Q4.(1.5) Use o Teorema do Valor Intermediário (TVI) para mostrar que a equação

$$e^x = 2 - x$$

tem pelo menos uma raiz real.

Solução: Mostrar que a equação acima tem pelo menos uma raiz real é equivalente a mostrar que a função f definida como $f(x) = e^x - 2 + x$ possui uma raiz real. (0.3)

Como a f definida acima, é contínua, pois a função exponencial é contínua e o polinômio $-2 + x$ é contínuo, então podemos utilizar o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que a função f definida acima possui uma raiz real. (0.3)

Para isso, observe que (0.4)

$$\begin{aligned} f(0) &= e^0 - 2 + 0 = 1 - 2 = -1 < 0 \\ f(2) &= e^2 - 2 + 2 = e^2 > 0. \end{aligned}$$

Como $f(0) < 0 < f(2)$, (0.2) então pelo (TVI), segue que existe um número real $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, que vale

$$e^c = 2 - c. \text{ (0.3)}$$

Q5.(1.5) Encontre as assíntotas horizontais e verticais, caso existam, da função

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20}.$$

Solução: *Assíntotas verticais:* Como $x^2+x-20 = 0$ para $x = -5$ e $x = 4$, então as possíveis assíntotas verticais para f seriam $x = -5$ e $x = 4$. Vamos verificar se elas são realmente as assíntotas verticais. Observe que

$$\frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20} = \frac{(x+4)(x-4)}{(x+5)(x-4)} = \frac{x+4}{x+5},$$

sendo assim, $x = -5$ é o único candidato a assíntota vertical. (0.4)

Para verificar se $x = -5$ é assíntota, basta calcular $\lim\limits_{x \to -5^-} f(x)$ ou $\lim\limits_{x \to -5^+} f(x)$. Temos que $\lim\limits_{x \to -5^-} x + 4 = -1$ e $\lim\limits_{x \to -5^-} x + 5 = 0$, mas por valores negativos, pois neste caso $x < -5$, assim $\lim\limits_{x \to -5^-} \dfrac{1}{x+5} = -\infty$. Logo

$$\lim_{x \to -5^-} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20} = \lim_{x \to -5^-} \frac{x+4}{x+5} = +\infty.$$

Portanto, $x = -5$ é uma assíntota vertical. (0.5)

Ou calculamos $\lim\limits_{x \to -5^+} f(x)$. Neste caso, $\lim\limits_{x \to -5^+} x+4 = -1$ e $\lim\limits_{x \to -5^+} x+5 = 0$, mas por valores positivos, pois neste caso $x > -5$, assim $\lim\limits_{x \to -5^+} \dfrac{1}{x+5} = +\infty$. Logo

$$\lim_{x \to -5^+} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20} = \lim_{x \to -5^+} \frac{x+4}{x+5} = -\infty.$$

Portanto, $x = -5$ é uma assíntota vertical.

Assíntotas horizontais: Vamos calcular os limites no infinito de f:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2} \left(\frac{1 - \frac{16}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{20}{x^2}} \right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - \frac{16}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{20}{x^2}} = 1,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} \left(\frac{1 - \frac{16}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{20}{x^2}} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{16}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{20}{x^2}} = 1,$$

pois $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$. (0.4)

Portanto, $y = 1$ é uma assíntota horizontal para f. (0.2)

Questão Extra (1.0)

(0.1)(a) Escreva a definição precisa de limite $\lim_{x\to p} f(x) = L$.

Solução: Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para $x \in D_f$, temos

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

(0.1)(b) Sejam a e b os dois últimos dígitos não nulos de seu RA. Calcule $\lim_{x\to b} \frac{1}{ax}$.

Solução: Temos que $a, b \geq 1$. Calculando:

$$\lim_{x\to b} \frac{1}{ax} = \frac{1}{ab}.$$

(0.8)(c) Demonstre, usando a definição ϵ, δ, o limite calculado no item (b).

Solução: Queremos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$, tal que

$$0 < |x - b| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{ax} - \frac{1}{ab} \right| < \varepsilon.$$

Para isso, observe que

$$\left| \frac{1}{ax} - \frac{1}{ab} \right| = \left| \frac{b - x}{axb} \right| = \frac{1}{a|x|b} |b - x|.$$

Se conseguirmos uma constante $C > 0$ tal que $\frac{1}{a|x|b} < C$ então se $|x - b| < \frac{\varepsilon}{C}$, obteríamos que

$$\left| \frac{1}{ax} - \frac{1}{ab} \right| < \varepsilon.$$

Para encontrar uma constante C, restringimos x a um intervalo centrado em b. Por exemplo, se

$$|x - b| < \frac{b}{2} \;\Leftrightarrow\; -\frac{b}{2} < x - b < \frac{b}{2} \;\Leftrightarrow\; 0 < \frac{b}{2} < x < \frac{3}{2}b,$$

já que $b \geq 1 > 0$. Logo,

$$0 < \frac{b}{2} < x \;\Leftrightarrow\; 0 < \frac{1}{x} < \frac{2}{b} \;\Leftrightarrow\; 0 < \frac{1}{axb} = \frac{1}{a|x|b} < \frac{2}{ab^2}.$$

Assim, basta tomar $C = \frac{2}{ab^2}$.

Portanto, para que as duas restrições

$$|x - b| < \frac{b}{2} \qquad \text{e} \qquad |x - b| < \frac{\varepsilon}{C}$$

sejam satisfeitas, basta escolher $\delta = \min \left\{ \frac{b}{2}, \frac{\varepsilon}{C} \right\}$. De fato, se $0 < |x - b| < \delta$ concluímos que

$$\left| \frac{1}{ax} - \frac{1}{ab} \right| = \frac{1}{a|x|b} |b - x| < C\delta < \varepsilon,$$

como queríamos.