ATENÇÃO: **Não é permitido destacar as folhas**

1ª Prova de MA111 — Turmas A e B — 28/03/2014

NOME: GABARITO **RA:**

ASSINATURA:

1(a) (1,5 pontos) Resolva a inequação $\left|\frac{5}{2x-1}\right| \leq \left|\frac{1}{x-2}\right|$ e expresse o conjunto solução em notação de intervalos.

1(b) (0,5 ponto) Sendo A o conjunto encontrado na parte (a), encontre, caso existam, $\max A$, $\min A$, $\sup A$ e $\inf A$.

SOLUÇÃO. 1(a): $\left|\frac{5}{2x-1}\right| \leq \left|\frac{1}{x-2}\right| \quad (*)$

$2x-1 \neq 0$ e $x-2 \neq 0 \iff x \neq 1/2$ e $x \neq 2$

$(*) \iff 5|x-2| \leq |2x-1|$

$x-2$	$-$	2	$+$
$2x-1$	$-$	1/2	$+$

$\boxed{x < 1/2}$ $\quad 5[-(x-2)] \leq -(2x-1) \iff -5x+10 \leq -2x+1$

$\iff 9 \leq 3x \iff 3 \leq x$

$S_1 = (-\infty, 1/2) \cap [3, +\infty) = \emptyset$

$\boxed{1/2 < x < 2}$ $\quad 5[-(x-2)] \leq 2x-1 \iff -5x+10 \leq 2x-1$

$\iff 11 \leq 7x \iff 11/7 \leq x$

$S_2 = (1/2, 2) \cap [11/7, +\infty) = [11/7, 2)$

$\boxed{x > 2}$ $\quad 5(x-2) \leqslant 2x-1 \iff 5x-10 \leqslant 2x-1$

$\iff 3x \leqslant 9 \iff x \leqslant 3$

$S_3 = (2, +\infty) \cap (-\infty, 3] = (2, 3]$

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 =$ conjunto solução de $(*)$

$= \phi \cup [11/7, 2) \cup (2, 3] = [11/7, 2) \cup (2, 3]$

$= [11/7, 3] \setminus \{2\}$

1 (b) : $A = [11/7, 3] \setminus \{2\}$

$\max A = 3 \quad , \quad \min A = 11/7$

$\sup A = 3 \quad , \quad \inf A = 11/7$

2(a) (1 ponto) Usando indução finita prove que, se $p \in \mathbb{Z}$ é ímpar, então p^n é ímpar, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2(b) (1 ponto) Usando (a) prove que $\sqrt[n]{2}$ é irracional, para $n = 2, 3, 4, \ldots$.

SOLUÇÃO. 2(a): $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

$P(n)$: p é ímpar $\Longrightarrow$ p^n é ímpar

p é ímpar $\Rightarrow$ $p^1 = p$ é ímpar $\Rightarrow$ $P(1)$ é verdadeira

Suponhamos que $P(n)$ seja verdadeira. Vamos mostrar que $P(n+1)$ é verdadeira.

$$\left\{\begin{array}{l} p \text{ é ímpar,} \\ \text{isto é,} \\ p = 2k+1,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \xRightarrow{H.I.} p^n \text{ é ímpar}$$

$$\Longrightarrow \exists\ m \in \mathbb{N} \text{ tal que } p^n = 2m+1$$

$$\Longrightarrow p^{n+1} = p^n \cdot p = (2m+1)(2k+1)$$

$$= 2\underbrace{(2mk + m + k)}_{\in \mathbb{Z}} + 1$$

$$= 2\ell + 1, \quad \ell = 2mk + m + k \in \mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow p^{n+1} \text{ é ímpar}$$

Segue pelo P.I.F. que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

2(b): Suponhamos que a equação $x^n = 2$ admite uma solução racional $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Vamos supor também que o quociente $\frac{a}{b}$ é irredutível, isto é, $mdc\{a, b\} = 1$.

$$x^n = 2 \iff \frac{a^n}{b^n} = 2 \implies a^n = 2b^n \implies a^n \text{ é par}$$

Se "a" for impar, por 2(a) teremos a^n impar. Logo "a" deve ser par. Seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k$.

$$a = 2k \implies a^n = (2k)^n = 2^n k^n$$

$$2b^n = a^n = 2^n k^n \implies b^n = 2^{n-1} k^n \text{ par pois } n \geq 2$$

$$b^n \text{ é par} \xRightarrow{2(a)} b \text{ é par}$$

Concluimos que a e b são pares o que contradiz $mdc\{a, b\} = 1$.

Assim chegamos a uma contradição por termos suposto que existe $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^n = 2$.

Logo a equação $x^n = 2$ não admite solução racional e portanto $\sqrt[n]{2}$ é irracional.

3. Considere as funções: $f(x) = 2 - x$ e

$$g(x) = \begin{cases} -x & se \quad -2 \leq x < 0, \\ x - 1 & se \quad 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & se \quad x \notin [-2, 2]. \end{cases}$$

(a) (1,5 pontos) Encontre a expressão da função composta $(g \circ f)(x)$.

(b) (0,5 ponto) Esboce o gráfico de $g \circ f$ e a partir do gráfico conclua em que pontos a função $g \circ f$ é descontínua.

SOLUÇÃO. (a)

$$\begin{cases} -2 \leq 2-x < 0 \iff -4 \leq -x < -2 \iff \boxed{2 < x \leq 4} \\ g(f(x)) = g(2-x) = -(2-x) = x-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq 2-x \leq 2 \iff -2 \leq -x \leq 0 \iff \boxed{0 \leq x \leq 2} \\ g(f(x)) = (2-x) - 1 = 1-x \end{cases}$$

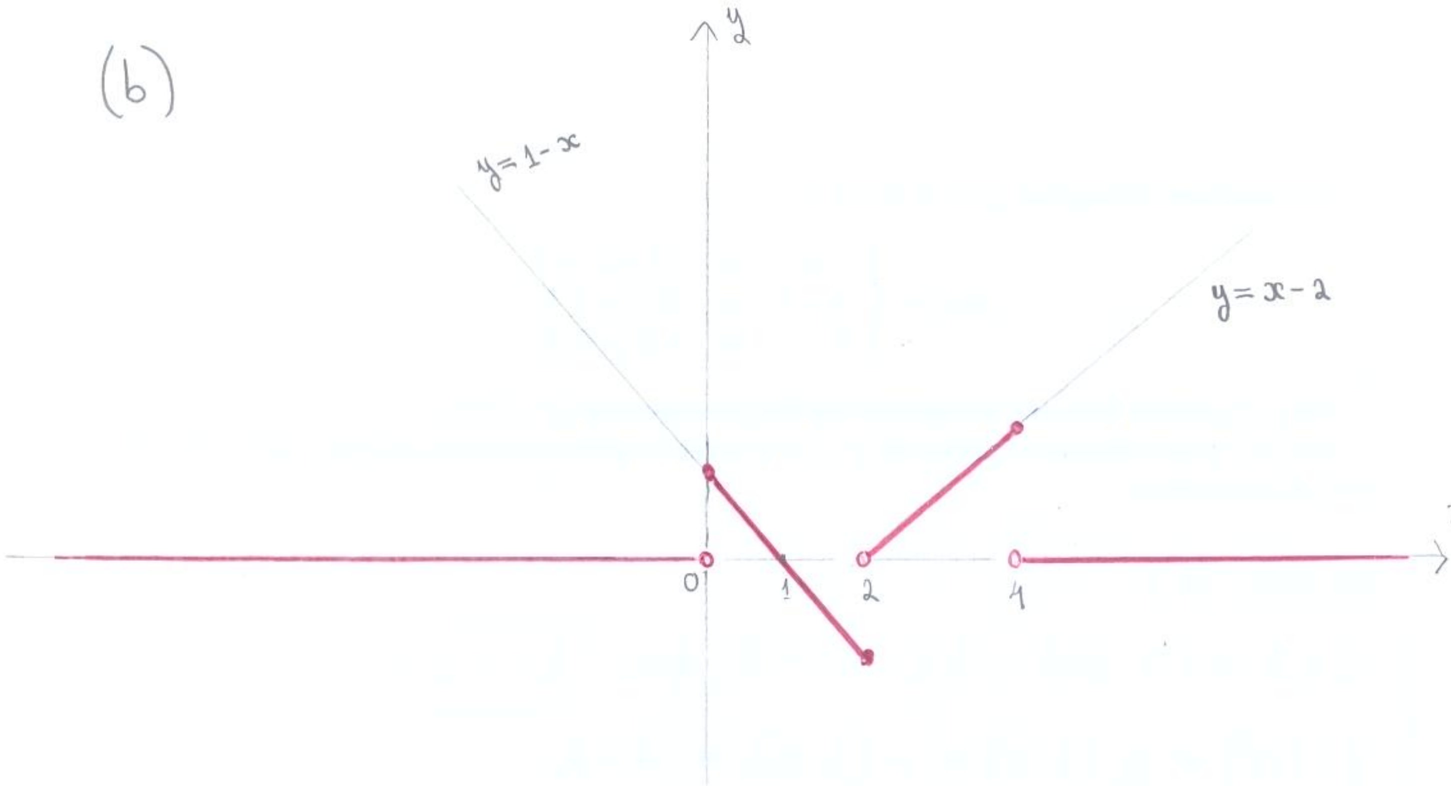
$$-2 \leq 2-x \leq 2 \iff -4 \leq -x \leq 0 \iff \boxed{0 \leq x \leq 4}$$

Então

$$g \circ f(x) = \begin{cases} x-2 & se \quad 2 < x \leq 4, \\ 1-x & se \quad 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & se \quad x \notin [0,4]. \end{cases}$$

$$f(0) = 1, \quad f(2) = -1, \quad f(4) = 2$$

(b)



O gráfico de $g \circ f$ está quebrado em 0, 2 e 4, e somente em 0, 2 e 4. Portanto os pontos de descontinuidade de $g \circ f$ são: 0, 2 e 4.

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(a+b) = f(a)f(b), \forall\, a, b \in \mathbb{R}$.

(a) (0,5 ponto) Quais os possíveis valores para $f(0)$.

(b) (1,5 pontos) Suponha que $f(0) \neq 0$ e que f é contínua em $p = 0$. Mostre que f é contínua em todo $p \in \mathbb{R}$. (**Sugestão:** Calcule $\lim_{x\to p}(f(x) - f(p))$).

<u>SOLUÇÃO</u>. (a): $f(0) = f(0+0) = f(0)\cdot f(0) = (f(0))^2$

$0 = (f(0))^2 - f(0) = f(0)(f(0)-1) \Rightarrow f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

(b) Como $f(0) \neq 0$, então $f(0) = 1$. Tomando $x = y + p$,

(1) $f(x) - f(p) = f(y+p) - f(p) = f(y)f(p) - f(p)$
$= f(p)(f(y)-1) = f(p)(f(y) - f(0))$

(2) $y = x - p \Rightarrow \lim\limits_{x\to p} y = \lim\limits_{x\to p}(x-p) = 0$

(3) f é contínua em $0 \Rightarrow \lim\limits_{y\to 0} f(y) = f(0)$

$\Rightarrow \lim\limits_{y\to 0}(f(y) - f(0)) = \lim\limits_{y\to 0} f(y) - f(0)$
$= f(0) - f(0) = 0$

Assim

$$\lim_{x\to p}(f(x) - f(p)) \overset{(1)\,e\,(2)}{=} \lim_{y\to 0} f(p)(f(y) - f(0))$$

$$= f(p)\lim_{y\to 0}(f(y) - f(0)) \overset{(3)}{=} f(p)\cdot 0 = 0$$

5. Calcular:

$$(\mathbf{a})(0,8)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2},\quad (\mathbf{b})(0,7)\ \lim_{x\to 0}\frac{8x}{3\operatorname{sen}x-x},$$

$$(\mathbf{c})(0,8)\ \lim_{x\to 2}([[x]]+[[3-x]])\ (\textbf{Sugestão:}\text{Use limites laterais}),$$

$$(\mathbf{d})(0,7)\ \lim_{x\to 0}f(x)\ \text{sabendo que}\ |f(x)-5|\le x^4\cos^2\frac{1}{x},\ \forall x\in\mathbb{R}, x\neq 0.$$

SOLUÇÃO. (a): $\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1=(\sqrt[3]{x}-1)^2$

Tomando $a=\sqrt[3]{x}$ e $b=1$, obtemos

$$x-1=a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$$

e assim

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}=\frac{(\sqrt[3]{x}-1)^2}{(\sqrt[3]{x}-1)^2(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)^2}=\frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)^2}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)^2}$$

$$=\frac{1}{\left(\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)^2}=\frac{1}{9}$$

(b) $$\lim_{x\to 0}\frac{8x}{3\operatorname{sen}x-x}=\lim_{x\to 0}\frac{8}{3\frac{\operatorname{sen}x}{x}-1}$$

$$=\frac{8}{3\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}-1}=\frac{8}{3-1}=\frac{8}{2}=4$$

(c) $x \in (2,3) \Longrightarrow [\![x]\!] = 2$

$x \in (2,3) \Longleftrightarrow 2 < x < 3 \Longleftrightarrow -3 < -x < -3$
$\Longleftrightarrow 0 < 3-x < 1 \Longrightarrow [\![3-x]\!] = 0$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} [\![x]\!] + [\![3-x]\!] = \lim_{\substack{x\to 2\\ x\in(2,3)}} [\![x]\!] + [\![3-x]\!] = \lim_{\substack{x\to 2\\ x\in(2,3)}} (2+0) = 2$

$x \in (1,2) \Longrightarrow [\![x]\!] = 1$

$x \in (1,2) \Longleftrightarrow 1 < x < 2 \Longleftrightarrow -2 < -x < -1 \Longleftrightarrow 1 < 3-x < 2$
$\Longrightarrow [\![3-x]\!] = 1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} [\![x]\!] + [\![3-x]\!] = \lim_{\substack{x\to 2\\ x\in(1,2)}} [\![x]\!] + [\![3-x]\!] = \lim_{\substack{x\to 2\\ x\in(1,2)}} (1+1) = 2$

Segue por (1) e (2) que $\displaystyle\lim_{x\to 2} [\![x]\!] + [\![3-x]\!] = 2$

(d) $\left|\cos^2 \frac{1}{x}\right| \leq 1,\ \forall x \neq 0$ e $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^4 = 0^4 = 0$

$\Longrightarrow$ (por propriedade de limite) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^4 \cos^2 \frac{1}{x} = 0$

$|f(x) - 5| \leq x^4 \cos^2 \frac{1}{x}\ \forall x \neq 0$

$\Longrightarrow \quad 5 - x^4 \cos^2 \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 5 + x^4 \cos^2 \frac{1}{x},\ \forall x \neq 0$

Como $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(5 \pm x^4 \cos^2 \frac{1}{x}\right) = 5 \pm \lim_{x\to 0} x^4 \cos^2 \frac{1}{x} = 5 \pm 0 = 5,$

segue pelo teorema do confronto que

$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 5.$