Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas – ICEx
Departamento de Matemática

Cálculo Diferencial e Integral II
Resolução da 3ª prova - 29/06/2011 - 7h30m

Questão 1 (10 pontos). Suponha que $z = f(x, y)$, onde $x = g(s, t)$, $y = h(s, t)$, $g(1, 2) = 3$, $g_x(1, 2) = -1$, $g_t(1, 2) = 4$, $h(1, 2) = 6$, $h_s(1, 2) = -5$, $h_t(1, 2) = 10$, $f_x(3, 6) = 7$ e $f_y(3, 6) = 8$.

Determine $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$ quando $s = 1$ e $t = 2$.

Solução. Pela Regra da Cadeia, aplicada no ponto em que $s = 1$, $t = 2$, e também $x = g(1, 2) = 3, y = h(1, 2) = 6$, temos

$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} = f_x(3, 6)g_s(1, 2) + f_y(3, 6)h_s(1, 2) = (7)(-1) + (8)(-5) = -47$

e, similarmente,

$\frac{\partial z}{\partial t} = f_x(3, 6)g_t(1, 2) + f_y(3, 6)h_t(1, 2) = (7)(4) + (8)(10) = 108.$

Questão 2. O formato de um morro pode ser aproximado perto do seu cume pela equação

$$z = 3000 - \frac{(2x^2 + 3y^2)}{1000}$$

O eixo x aponta para o Leste e o eixo y para o Norte e as unidades correspondem a um metro. Uma pessoa parte do ponto 100m a leste e 50m ao norte do cume.
1. (4 pontos) Se ela se dirigir para o Sudeste, ela começará a subir ou descer? Com que taxa?
2. (4 pontos) Em que direção e sentido ela deverá se dirigir para descer o mais rapidamente possivel.
3. (4 pontos) Em qual direção e sentido ela deverá andar para subir a uma taxa de elevação de 1/4?

Solução. 2.1. As derivadas parciais são: $z_x = \dfrac{-x}{250}$, $z_y = \dfrac{-3y}{500}$.
O valor delas no ponto $P = (100, 50)$ é : $z_x(100, 50) = \dfrac{-100}{250} = \boxed{-\dfrac{2}{5}}$ e $z_y(100, 50) = \boxed{\dfrac{-3}{10}}$.

$\Rightarrow \boxed{\nabla z(100, 50) = (-\dfrac{2}{5}, -\dfrac{3}{10})}$, é o gradiente de z no ponto P. E a derivada direcional pedida $D_{\vec{u}}z(100, 50)$ é na direção unitária $\vec{u}$ do vetor $\vec{v} = (1, -1)$ $\Rightarrow$ $\vec{u} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$

$$\Rightarrow D_{\vec{u}}z(100, 50) = \nabla z(100, 50) \cdot \vec{u} = (-\frac{2}{5})(\frac{1}{\sqrt{2}}) + (-\frac{1}{10})(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{-1}{10\sqrt{2}} < 0$$

$\Rightarrow$ **A pessoa vai descer com uma taxa negativa de $-1/10\sqrt{2}$.**

2.2. Ela vai subir mais rápido na direção e sentido do gradiente $\nabla z(100, 50)$ e portanto, **ela vai descer mais rapidamente na direção e sentido de** $-\nabla z(100, 50) = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{10}\right)$ ou, também, na direção e sentido do vetor $(4, 3)$.

2.3. $\rightarrow$ **1ª Opção.** Procuramos um vetor $\vec{u} = (a, b)$ tal que

$$D_{\vec{u}}z(100, 50) = (-\frac{2}{5})a - (\frac{3}{10})b = \frac{1}{4},\ a^2 + b^2 = 1$$

$b = -\frac{4}{3}a - \frac{5}{6} \Rightarrow a^2 + (-\frac{4}{3}a - \frac{5}{6})^2 = a^2 + \frac{16}{9}a^2 + \frac{20}{9}a + \frac{25}{36} = 1$

$\Rightarrow 100a^2 + 80a - 11 = 0 \Rightarrow a = \dfrac{-4 \pm 3\sqrt{3}}{10},\ b = \dfrac{-3 \mp 4\sqrt{3}}{10}$

Temos duas soluções $\boxed{\vec{u} = (\dfrac{-4 + 3\sqrt{3}}{10}, \dfrac{-3 - 4\sqrt{3}}{10})}$ e $\boxed{\vec{u} = (\dfrac{-4 - 3\sqrt{3}}{10}, \dfrac{-3 + 4\sqrt{3}}{10})}$.

Verificação de uma das soluções:
$(-\frac{2}{5})a - (\frac{3}{10})b = (-\frac{2}{5})(\frac{-4+3\sqrt{3}}{10}) - (\frac{3}{10})(\frac{-3-4\sqrt{3}}{10}) = (-\frac{6}{50} + \frac{12}{10})\sqrt{3} + (\frac{8}{50} + \frac{9}{100}) = \dfrac{1}{4}.$

2.3. $\rightarrow$ **2ª Opção.** Se θ_1 é o ângulo entre a direçao unitária $\vec{u} = (a, b)$ pedida e o gradiente $\nabla z(100, 50)$, então, como $|\nabla z(100, 50)| = 1/2$,

$$\nabla z(100, 50) \cdot \vec{u} = |\nabla z(100, 50)| \cdot |\vec{u}| \cos\,\theta_1 = \frac{1}{2}\cos\,\theta_1 = \frac{1}{4}$$

ou seja $\cos\theta_1 = \dfrac{1}{2}$. Temos duas possibilidades $\operatorname{sen}\theta_1 = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Seja θ_2 o ângulo entre o gradiente $\nabla z(100, 50)$ e o eixo x. Então $\cos\,\theta_2 = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{sen}\theta_2 = -\frac{3}{5}$.
E seja α o ângulo entre a direção procurada $\vec{u}$ e o eixo dos $x \Rightarrow\ \alpha = \theta_1 + \theta_2$.
Pelas fórmulas do cosseno de uma soma e do seno de uma soma

$$\begin{aligned}\cos\,\alpha &= \cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\,\theta_1 \cos\,\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \\ &= (-\frac{4}{5})\frac{1}{2} - (-\frac{3}{5})\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-4 + 3\sqrt{3}}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\alpha &= \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{sen}\theta_1 \cos\,\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_2 \cos\,\theta_1 \\ &= (-\frac{3}{5})\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(-\frac{4}{5}) = \frac{-3 - 4\sqrt{3}}{10},\end{aligned}$$

que corresponde à possibilidade $\operatorname{sen}\theta_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **Isso dá, novamente, como primeira solução,** $\vec{u} = (a, b)$ com $a = \frac{-4+3\sqrt{3}}{10}$, $\quad b = \frac{-3-4\sqrt{3}}{10}$.
A outra resposta sai da segunda possibilidade $\operatorname{sen}\theta_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Questão 3. Considere a função $f(x, y) = x^2 - y^2$

1. (4 pontos) Dê a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto correspondente a $x = 2$ e $y = 1$.
2. (4 pontos) Encontre e classifique os pontos críticos de f.
3. (4 pontos) Determine o valor máximo e o mínimo de f na região $x^2 + y^2 \leq 8$.

Solução. 3.1. As coordenadas do ponto P_0 são
$x_0 = 2,\ y_0 = 1,\ z_0 = f(2, 1) = 4 - 1 = 3$
e **a equação do plano tangente a** $z = f(x, y)$ **em** P_0 **é**

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

ou seja,

$$\boxed{z - 3 = 4(x-2) + -2(y-1)}\,,$$

pois, $f_x = 2x,\ f_y = -2y,\ f_x(2,1) = 4$ e $f_y(2,1) = -2$.

3.2. O único ponto crítico é $(0,0)$, pois,
$f_x = 2x = 0,\ f_y = -2y = 0\ \Rightarrow\ (x,y) = (0,0)$
E temos,
$f_{xx} = 2,\ f_{yy} = -2,\ f_{xy} = 0,\ D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = -4 \Rightarrow D(0,0) = -4$ $(0,0)$ é um ponto de sela e $\boxed{f(0,0) = 0}$

3.3. Os máximos e mínimos de f que estão no interior $x^2 + y^2 < 8$ do conjunto $g(x,y) = x^2 + y^8 \leq 8$ encontram-se entre os pontos críticos de f e já foram achados acima.

Os máximos e mínimos de f que estão no fronteira $g(x,y) = x^2 + y^2 = 8$ do conjunto $g(x,y) = x^2 + y^8 \leq 8$ serão achados agora usando Multiplicadores de Lagrange.
Ou seja, dados $f = x^2 - y^2$ sujeita à restrição $g(x,y) = x^2 + y^2 - 8 = 0$, queremos achar as soluções do sistema $\nabla f = \lambda\,\nabla g,\ g = 0$,

$$\begin{cases} 2x = \lambda\,2x \\ -2y = \lambda\,2y \\ x^2 + y^2 - 8 = 0, \end{cases}$$

o que abre duas possibilidades,

$$\begin{cases} x = 0\ \Rightarrow\ y^2 = 8,\ y = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{f(0, \pm 2\sqrt{2}) = -8} \quad \text{(Mínimo)} \\ \lambda = 1\ \Rightarrow\ y = 0\ \Rightarrow\ x^2 = 8\ x = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{f(0, \pm 2\sqrt{2}) = -8} \quad \text{(Máximo)} \end{cases}$$