Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas – ICEx
Departamento de Matemática

Resolução da 1a Prova de Cálculo 3 - Turma D - 01/09/2010 - 11h 10m

1. Inverta a ordem de integração e calcule a integral.

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\, dx\, dy.$$

Solução:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \int_y^{\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\, dx\, dy = \int_0^{\sqrt{\pi}} \int_0^{x} \cos(x^2)\, dy\, dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{\pi}} x\, \cos(x^2)\, dx = \int_0^{\pi} \not{x}\, \cos(u)\, \frac{du}{2\, \not{x}} = \frac{1}{2}(\,\mathrm{sen}\,(\pi) - \,\mathrm{sen}\,(0)) = 0.$$

$$(u = x^2,\ du = 2x\, dx,\ dx = \frac{du}{2x}).$$

2. Efetuando uma mudança de variáveis adequada, calcule a integral $\displaystyle\int\int_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA$, onde R é a região trapezoidal com vértices $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,2)$ e $(0,1)$.

Solução: Por causa do integrando ser $\cos\left(\dfrac{y-x}{y+x}\right)$, escolhemos

$$u = y - x,\ v = y + x\ \Rightarrow\ x = \frac{v-u}{2},\ y = \frac{v+u}{2}$$

donde

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Portanto o módulo do jacobiano é $\dfrac{1}{2}$. E como a região R está limitada pelas retas $x = 0,\ y = 0,\ y + x = 1$ e $y + x = 2$, a nossa integral é:

$$\int\int_R \cos\left(\frac{y-x}{y+x}\right) dA = \int_1^2 \int_{-v}^{v} \cos\left(\frac{u}{v}\right) \frac{1}{2} du\, dv = \frac{1}{2}\int_1^2 v\ \mathrm{sen}\left(\frac{u}{v}\right)\Big]_{u=-v}^{u=v} dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 v(\,\mathrm{sen}\ 1 - \mathrm{sen}\,(-1))\, dv = \,\mathrm{sen}\ 1\left(\frac{v^2}{2}\right)\Big]_{v=1}^{v=2} = \frac{\mathrm{sen}\,(1)}{2}\,(4-1) = \frac{3}{2}\,.\,\mathrm{sen}\,(1)\,.$$

3. Utilize coordenadas esféricas para calcular

$$I = \int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} y^2 \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dz\, dx\, dy.$$

Solução:

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{0}^{\pi/2} \int_{0}^{2} \rho^2 \text{ sen}^2\phi \text{ sen}^2\theta .\, \rho .\, \rho^2 \text{sen } \phi .\, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta .\int_{0}^{\pi/2} \text{sen}^2\phi .\ \text{sen}\,\phi\ d\phi \int_{0}^{2} \rho^5\, d\rho$$

$$= \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen } 2\theta}{4}\right)\Bigg]_{-\pi/2}^{\pi/2} . \int_{0}^{\pi/2} (1-\cos^2\phi).\ \text{sen}\,\phi\ d\phi .\ \frac{\rho^6}{6}\Bigg]_{0}^{2}$$

$$= \frac{\pi}{2}.\left(\frac{\cos^3\phi}{3} - \cos\phi\right)\Bigg]_{0}^{\pi/2} .\frac{64}{6} = \frac{\pi}{\cancel{2}}.\left(-\frac{1}{3}+1\right).\left(\frac{\overset{16}{\cancel{32}}}{3}\right) = \frac{32\pi}{9}.$$

4. Determine o volume do sólido delimitado pelos cilindros parabólicos $y = 1 - x^2,\ y = x^2 - 1$ e pelos planos $x + y + z = 2,\ 2x + 2y - z + 10 = 0.$

Solução:

$$V = \int_{-1}^{1} \int_{x^2-1}^{1-x^2} \int_{2-x-y}^{2x+2y+10} dz\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} \int_{x^2-1}^{1-x^2} (3x+3y+8)\, dy\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (3x(2(1-x^2)) + 3(0) + 8(2(1-x^2)))\ dx$$

$$= 2.\,16(x - \frac{x^3}{3})\Bigg]_{0}^{1} = \frac{64}{3}.$$