Terceira Prova de Cálculo III - 15/12/2012

Nome: ______________________________ **Turma:** ________

---

1. Calcule a área da parte do plano $z = 30 + 2x - 5y$ que está dentro do cilindro elítico $9x^2 + 4y^2 = 9$.

Res.:

$$A(S) = \int\int_S \sqrt{1 + 2^2 + (-5)^2} dS = \sqrt{30} \int\int_D dA = \sqrt{30}\left(1 \times \frac{3}{2}\right)\pi = \frac{3\pi}{2}\sqrt{30}.$$

---

2. Considere S a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(a) Calcule a integral $\int\int_S (x^2 + y^2 + z^6) dS$ diretamente. (Obs.: note que $x^2 + y^2 + z^6 = (x^2 + y^2 + z^2) + z^6 - z^2$.)

Res.:

$$\begin{aligned}
\int\int_S (x^2 + y^2 + z^6) dS &= \int\int_S (1 + z^6 - z^2) dS \\
&= \int\int_S dS + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\cos^6\phi - \cos^2\phi)\sin\phi d\phi d\theta \\
&= A(S) + 2\pi\left(\int_0^{\pi}\cos^6\phi\sin\phi d\phi - \int_0^{\pi}\cos^2\phi\sin\phi d\phi\right) \\
&= 4\pi + 2\pi\left[-\frac{\cos^7\phi}{7} + \frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi} = 4\pi - 4\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) = \frac{68}{21}\pi.
\end{aligned}$$

(b) Calcule a integral $\int\int_S (x^2 + y^2 + z^6) dS$ utilizando o Teorema da Divergência.

Res.: Como $\overrightarrow{n} = \langle x, y, z\rangle$ podemos escrever $x^2 + y^2 + z^6 = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{n}$ em que $\overrightarrow{F} = \langle x, y, z^5\rangle$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\int\int\int_E \operatorname{div}\overrightarrow{F} dV &= \int\int\int_E (2 + 5z^4) dV = 2V(E) + 5\int\int\int_E z^4 dV \\
&= \frac{8\pi}{3} + 5\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 \rho^4\cos^4\phi\sin\phi\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta \\
&= \frac{8\pi}{3} + \left(\int_0^{2\pi} 5 d\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\cos^4\phi\sin\phi d\phi\right)\left(\int_0^1 \rho^6 d\rho\right) \\
&= \frac{8\pi}{3} + \frac{10\pi}{7}\left[-\frac{\cos^5\phi}{5}\right]_0^{\pi} = \frac{68}{21}\pi.
\end{aligned}$$

Outra resolução:

$$\begin{aligned}
\int\int_S (x^2+y^2+z^6)dS &= \int\int_S (1+z^6-z^2)dS \\
&= \int\int_S dS + \int\int_S (z^6-z^2)dS \\
&= A(S) + \int\int\int_E \operatorname{div}\left\langle 0,0,z^5-z\right\rangle dV \\
&= A(S) + \int\int\int_E (5z^4-1)dV \\
&= A(S) - V(E) + 5\int\int\int_E z^4 dV \\
&= 4\pi - \frac{4\pi}{3} + \frac{10\pi}{7}\left[-\frac{\cos^5\phi}{5}\right]_0^\pi = \frac{68}{21}\pi.
\end{aligned}$$

---

3. Utilize o Teorema de Stokes para calcular

$$\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r},$$

em que $\overrightarrow{F} = \left\langle 5y, z^2e^{y^2}, -x\right\rangle$ e C é a interseção do parabolóide $z = x^2+y^2$ com o cilindro $x^2+y^2 = 2y$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

Res.: A curva C satisfaz: $z = x^2+y^2 = 2y$. Ou seja, ela está no plano $z = 2y$ e sua projeção no plano xy é o círculo $x^2+y^2 = 2y$. Portanto, ela é a fronteira da superfície S, parte do plano $z = 2y$ que está sobre a região D no plano xy limitada pelo círculo $x^2+y^2 = 2y$. Completando quadrados vê-se que este círculo também tem equação $x^2+(y-1)^2 = 1$, isto é, tem raio 1 e centro em $(0,1)$. Podemos então utilizar o Teorema de Stokes na superfície S parametrizada como gráfico de função (com orientação positiva, de acordo com a orientação de C).Temos,

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 5y & z^2e^{y^2} & -x \end{pmatrix} = \left\langle 2ze^{y^2}, 1, -5\right\rangle$$

e

$$\begin{aligned}
\int_C \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int\int_S \operatorname{rot}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dS} &= \int\int_D \left(-2ze^{y^2}\frac{\partial z}{\partial x} - 1\frac{\partial z}{\partial y} - 5\right) dA \\
&= \int\int_D (-2-5)\, dA = -7\int\int_D dA = -7A(D) = -7\pi.
\end{aligned}$$

Fórmulas

1) Se S é parametrizada por $\overrightarrow{r}(u,v)$ com $(u,v)\in D$, então:

a) $dS = \|\overrightarrow{r_u}\times\overrightarrow{r_v}\|\, dA$

b) $\int\int_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \int\int_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v)) \cdot (\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})dA.$

2) Se $\overrightarrow{F} = \langle P, Q, R\rangle$ e S é da forma $z = z(x,y)$ com $(x,y) \in D$, então:

a) $dS = \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2} dA$

b) $\int\int_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \int\int_D (-P(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} - Q(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} + R(x,y,z))dA.$

3) Para a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$:

$\overrightarrow{r}(u,v) = \langle a \operatorname{sen}\phi\cos\theta, a \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta, a\cos\phi\rangle$, $\overrightarrow{r_\phi} \times \overrightarrow{r_\theta} = a\sin\phi\overrightarrow{r}(u,v)$ e $dS = a^2 \operatorname{sen}\phi d\phi d\theta.$

4) Coordenadas esféricas:

$x = \rho \operatorname{sen}\phi\cos\theta,\ \ y = \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta,\ \ z = \rho\cos\phi$ e $dV = \rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta.$